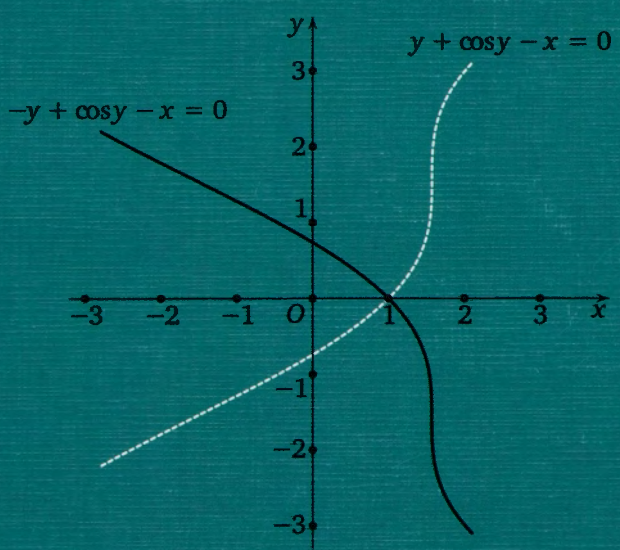
И. Я. Танатар

Геометрические преобразования графиков функций



И. Я. Танатар

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Москва
Издательство МЦНМО
2012

УДК 517
ББК 22.161
Т18

Танатар И. Я.

Т18 Геометрические преобразования графиков функций. — М.: МЦНМО, 2012. — 152 с.

ISBN 978-5-94057-885-7

Книга посвящена некоторым важным приемам построения графиков функций. Имеется большое количество упражнений, снабженных ответами.

Книга будет полезна школьным учителям математики, руководителям математических кружков и школьникам старших классов.

ББК 22.161

Печатается по изданию: И. Я. Танатар. Геометрические преобразования графиков функций. — М.: Госучпедгиз, 1960.

ISBN 978-5-94057-885-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

УРОКИ ТАНАТАРА. ПРЕДИСЛОВИЕ УЧЕНИКОВ

Исаак Яковлевич Танатар (19.11.1901–03.09.1964) трепетно относился к математике. Его преклонение пред классиками математики было искренним и заразительным. Вот он производит на доске преобразование и вдруг находит неожиданную, красивую подстановку — и искренняя радость вздергивает его усы. Впечатление, что он сделал научное открытие!

Мало кто из школьников подозревает, что математики-геометры занимаются не вполне тем, что преподают в школе, и что медианы, углы и окружности — это лишь частные примеры общих объектов, которыми занимается наука математика.

И только некоторые узнают, что касания, медианы и углы сохраняются не только при переносе и повороте, но и при гомотетии и инверсии. Оказывается, все параболы, гиперболы и эллипсы — родственники и могут считаться окружностями.

И все-таки загадкой остается, почему это так, какие свойства алгебраических формул объединяют столь различные геометрические образы? Развязывание узлов, в которые «завязаны» уравнения, — это интереснейшая область, проникнуть в которую, имея школьные знания, невозможно.

Исаак Яковлевич искал подходы к введению в «школьную» математику методов «настоящей» математики.

Мы, его ученики, испытали обаяние методики его преподавания, дающей понимание закономерностей и связей математических объектов, независимо от того, как далеко собирается зайти ученик в освоении «царицы наук».

Перевод одного геометрического образа в другой и влияние этой операции на представление функций оказалось доступным для толкового школьника. Эти закономерности открыли окно в огромный мир математики для сотен учеников замечательного учителя.

Как и всякая глубокая творческая работа, эта книга не устарела и будет отличным пособием для учителей, но она лишь введение в методы, которые устанавливают связи между элементарными объектами, однако на этой основе строится вся математика.

Ученики 1964 *года выпуска* 9–11 «З» *класса школы* № 2 (*ныне — Лицея «Вторая школа»*): *Е. А. Гребенюк* (*Малкова*), *Е. Ш. Исаева* (*Розенфельд*), *Л. Д. Кабзон, А. А. Коробов, Б. О. Макаревич, Л. А. Панкова* (*Мухина*), *Г. Ф. Ромащенко* (*Заботина*), *А. В. Суханов, В. В. Хачатурян, А. В. Чиколини, В. Д. Шеллов, В. А. Шохин.*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Требования глубокого внедрения в школьный курс математики понятия функции и ее геометрического представления стали сейчас общепризнанными и широко известными. Понятия функции и ее графика должны стать для учащихся старших классов столь же привычными, как, например, понятие уравнения. Не меньшее значение в современном преподавании геометрии должна иметь идея геометрического преобразования плоскости.

В упражнениях, связанных с геометрическими преобразованиями графиков функций, удачно сочетается идея точечного геометрического преобразования плоскости с идеей графического изображения функций. Однако такие упражнения в существующей учебной и учебно-методической литературе встречаются редко, они не систематизированы и не объединены общими идеями. Кроме того, значительная часть учителей из за отсутствия соответствующей литературы мало ознакомлена с теоретическими основаниями простейших преобразований графиков функций. Настоящая книга предназначена для заполнения этого пробела в нашей учебно-методической литературе.

Ознакомившись с содержанием книги, читатель обнаружит, что график одной и той же функции часто может рассматриваться как результат различных геометрических преобразований графика некоторой исходной функции. В ряде случаев, но не всегда, в книге указываются различные способы построения графиков одной и той же функции в зависимости от точки зрения, с которой она рассматривается.

Ограниченный объем книги не позволил рассмотреть ряд вопросов, напрашивающихся при ознакомлении с ее содержанием. Так, например, не рассмотрены графики уравнений вида

$$f\left(\frac{1}{x}, y\right) = 0, \quad f\left(x, \frac{1}{y}\right) = 0, \quad f(|x|, y) = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Не рассмотрены также применение геометрических преобразований графиков функций для графического решения уравнений и другие вопросы. Эти вопросы представляют благодарный материал для самостоятельной работы читателя.

Основным содержанием книги являются аффинные преобразования графиков, и даже не все аффинные преобразования, а главным образом симметрия и параллельные сдвиги. Именно эти преобразования должны найти место в преподавании в средней школе. Соответствующая часть книги написана поэтому с большей полнотой (§ 1–15). Остальная часть книги может найти применение в кружковых занятиях. В целом же книга преследует образовательную цель.

Являясь первой из работ, посвященных вопросам геометрических преобразований графиков функций, книга, конечно, не свободна от недостатков.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Общие сведения о графиках функций и графиках уравнений с двумя неизвестными

Графиком функции $y = f(x)$ называют, как известно, множество точек (геометрическое место точек) координатной плоскости, координаты которых x и y являются соответствующими друг другу значениями аргумента x и функции $y = f(x)$. Для функций действительного аргумента, рассматриваемых в дальнейшем, принято определение, в силу которого каждому значению аргумента x (конечно, из области определения функции) соответствует единственное значение функции. Поэтому любая прямая, параллельная оси ординат, может иметь с графиком функции не более чем одну общую точку. В противном случае оказалось бы, что некоторому значению аргумента x соответствует более чем одно значение функции, что противоречило бы определению функции.

Решением уравнения с двумя неизвестными x и y называется пара чисел (x_0, y_0), подстановка которых вместо x и y в уравнение обращает последнее в числовое тождество. Каждой паре чисел (x_0, y_0) можно поставить в соответствие точку координатной плоскости с координатами (x_0, y_0); таким образом, каждому решению уравнения с двумя неизвестными можно поставить в соответствие точку координатной плоскости.

Множество таких точек (решений уравнения) называется графиком уравнения. Для графика уравнения не имеет места правило, установленное выше для графиков функций, именно: прямая, параллельная оси ординат, может пересекать график уравнения более чем в одной точке.

Читатель легко вспомнит хорошо известное уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом, равным r. Это уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Прямые, параллельные оси ординат ($x = a$) и достаточно близкие к ней ($|a| < r$), пересекают график уравнения (окружность) в двух точках.

Действительно, ведь уравнение с двумя неизвестными x и y можно рассматривать как задание функции y в неявном виде. Чтобы полу-

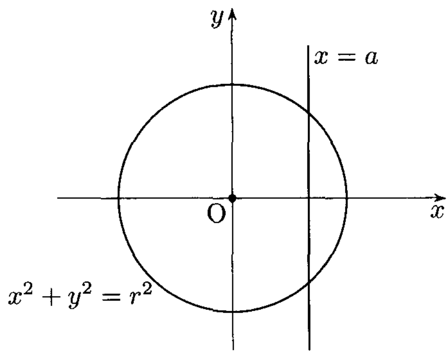


Рис. 1

чить y как явную функцию переменной x, надо решить уравнение относительно y. В приведенном примере мы получим две функции для y: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. Графиком первой из них служит полуокружность, расположенная над осью абсцисс, графиком второй — полуокружность, расположенная под осью абсцисс (см. рис. 1).

Уравнением с двумя неизвестными может быть задано бесконечное множество функций. Например, уравнением $x - \operatorname{tg} y = 0$ определяется бесконечное множество функций вида

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arctg} x, \\ y &= \operatorname{arctg} x + \pi, \\ y &= \operatorname{arctg} x + 2\pi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Любая прямая, параллельная оси ординат, имеет с графиком уравнения $x - \operatorname{tg} y = 0$ бесконечное множество общих точек (см. рис. 2).

В приведенных выше примерах рассматривались уравнения, допускавшие выделение y как явной функции переменной x. Однако это не всегда возможно. Например, для уравнения $y + \cos y + x = 0$ невозможно представление y в виде явной функции переменной x, но график функции существует (см. рис. 14), и можно рассматривать свойства такого графика, его различные преобразования.

Всякое уравнение с двумя неизвестными x и y можно привести к виду $\Phi(x, y) = 0$ (перенести все члены уравнения в левую часть).

Хотя в дальнейшем рассматриваются преобразования графиков функций, но получаемые результаты применимы и к графикам уравнений.

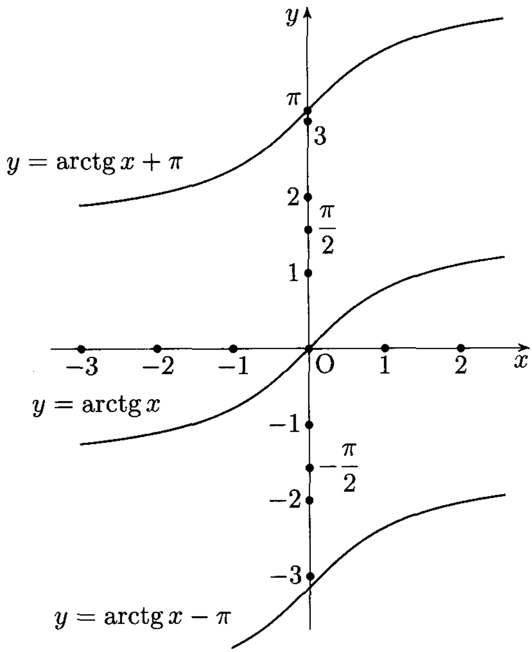


Рис. 2

Например, установив, что графики двух функций $f(x)$ и $f(-x)$ симметричны относительно оси ординат, мы можем считать, что графики двух уравнений $\Phi(x,y)=0$ и $\Phi(-x,y)=0$ также симметричны относительно оси ординат, или установив, что график функции $kf(x)$ есть результат некоторого сжатия-растяжения графика $f(x)$ к оси абсцисс, мы тем самым установим, что график уравнения $\Phi(x,ky)=0$ есть результат такого же сжатия-растяжения графика уравнения $\Phi(x,y)=0$ к оси абсцисс.

ГЛАВА 1

ОСЕВАЯ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

§ 1. Симметрия относительно оси ординат. Графики функций $f(x)$ и $f(-x)$

Если две точки $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ симметричны относительно оси ординат, то, очевидно, $y = y_1$ и $x + x_1 = 0$ (рис. 3). Очевидно, справедливо и обратное утверждение: если координаты двух точек $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ удовлетворяют соотношениям $y = y_1$ и $x + x_1 = 0$, то точки M и M_1 симметричны относительно оси ординат. Эти простые соображения позволяют установить вид графика функции $y = f(-x)$, если график функции $f(x)$ задан.

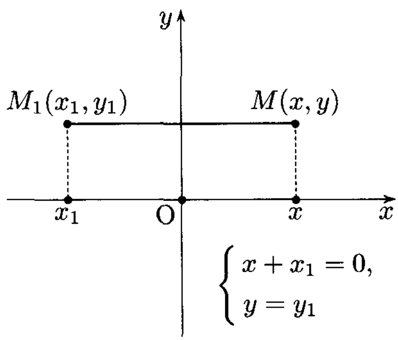


Рис. 3

На рис. 4 изображен график некоторой функции $f(x)$. Точка $M(x, y)$ с координатами x и y принадлежит этому графику. Графику функции $f(-x)$ должна принадлежать точка M_1 с такой же ординатой y и абсциссой x_1, если $f(-x_1) = f(x)$, т. е. если $-x_1 = x$, или $x + x_1 = 0$.

Как было установлено, две такие точки M и M_1 должны быть симметричны относительно оси ординат. Следовательно, каждой точке M графика функции $f(x)$ соответствует точка M_1, симметричная точке M относительно оси ординат и принадлежащая графику функции $f(-x)$.

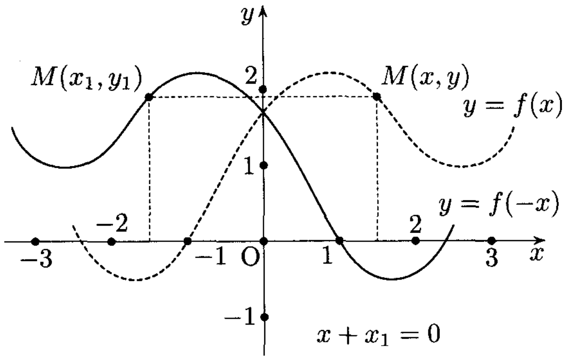


Рис. 4

Таким образом, *график функции* $f(-x)$ *симметричен графику функции* $f(x)$ *относительно оси ординат* (см. рис. 4).

Как известно, функция $f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)$, поэтому для графика четной функции ось ординат служит осью симметрии.

Хорошо известными примерами из школьного курса математики служат графики четных функций:

1) $y = x^2$ (парабола, см. рис. 5),

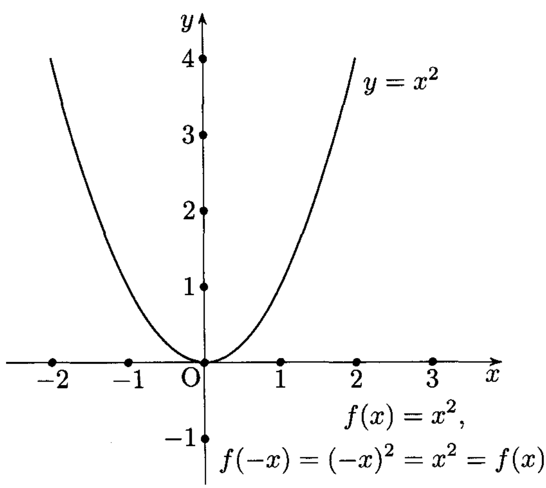


Рис. 5

2) $y = \cos x$ (косинусоида, см. рис. 6).

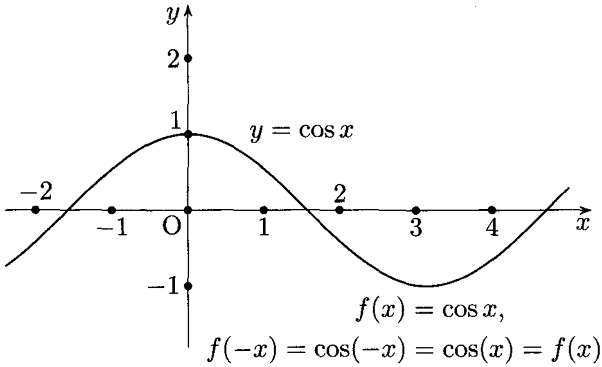


Рис. 6

На рис. 7–13 приведены графики функций $f(-x)$ для некоторых функций, рассматриваемых в школьном курсе математики.

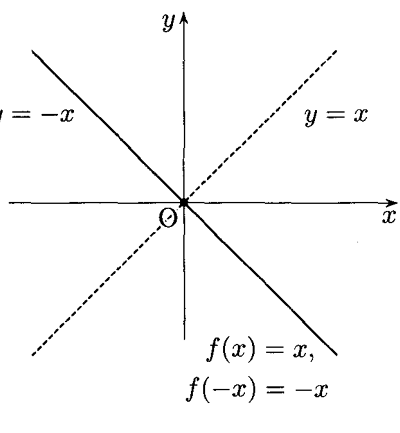


Рис. 7

Для графиков уравнений мы получаем следующее правило: *графики уравнений $f(x, y) = 0$ и $f(-x, y) = 0$ симметричны относительно оси ординат* (см., например, рис. 14).

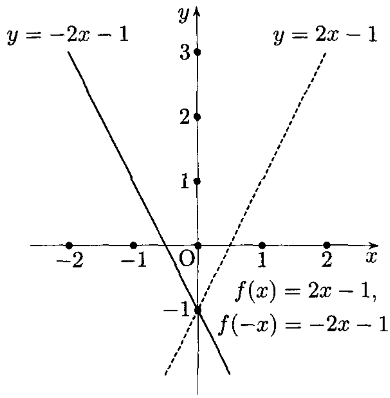


Рис. 8

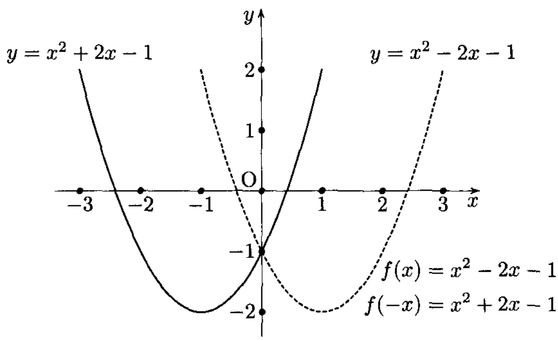


Рис. 9

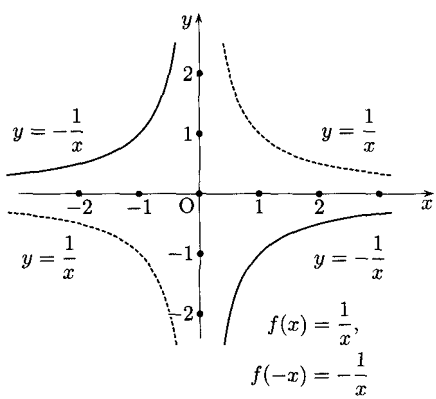


Рис. 10

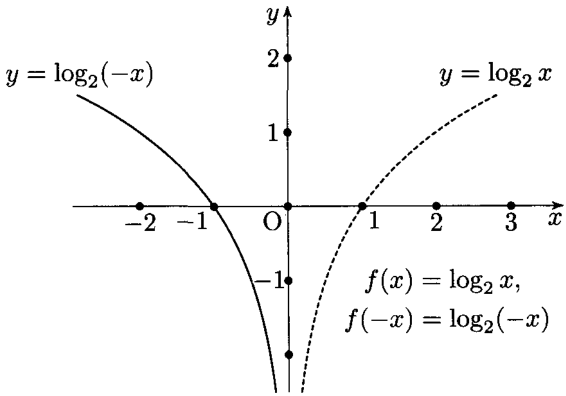


Рис. 11

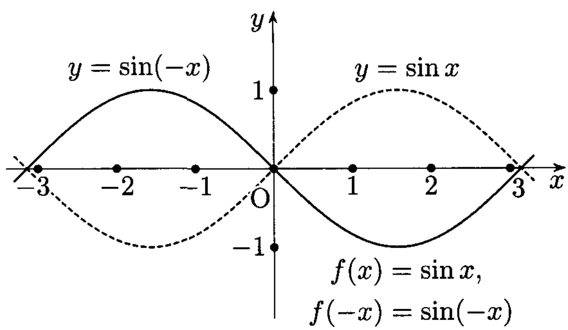


Рис. 12

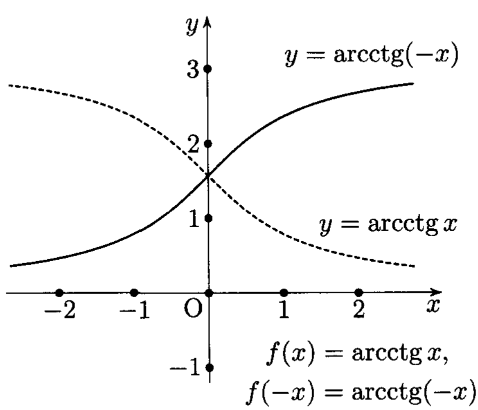


Рис. 13

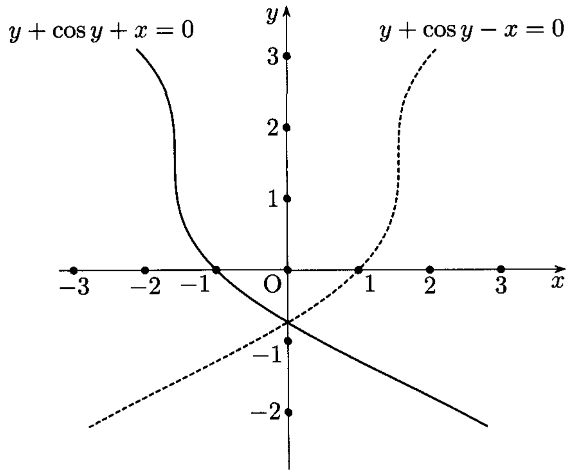


Рис. 14

Упражнения

Постройте графики функций.

1. $y = 2^{-x}$.

2. $y = \mathrm{tg}(-x)$.

3. $y = \mathrm{ctg}(-x)$.

4. $y = \arcsin(-x)$.

5. $y = \arccos(-x)$.

6. $y = \mathrm{arctg}(-x)$.

§2. Симметрия относительно оси абсцисс. Графики функций $f(x)$ и $-f(x)$

Если две точки $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ симметричны относительно оси абсцисс (см. рис. 15), то

$$x = x_1, \quad y = -y_1.$$

Очевидно и обратное утверждение: если координаты двух точек $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ удовлетворяют условиям

$$x = x_1, \quad y = -y_1,$$

то точки M и M_1 симметричны относительно оси абсцисс.

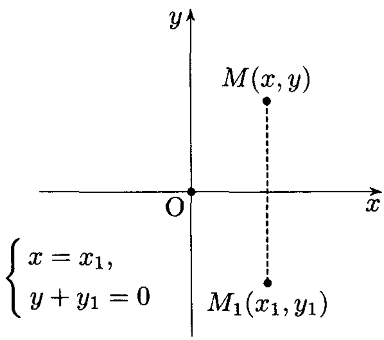


Рис. 15

Поэтому *графики функций* $f(x)$ *и* $-f(x)$ *симметричны относительно оси абсцисс* (см. рис. 16).

Применяя эту теорему к графикам уравнений, получим следующее правило: *графики уравнений* $f(x, y) = 0$ *и* $f(x, -y) = 0$ *симметричны относительно оси абсцисс.*

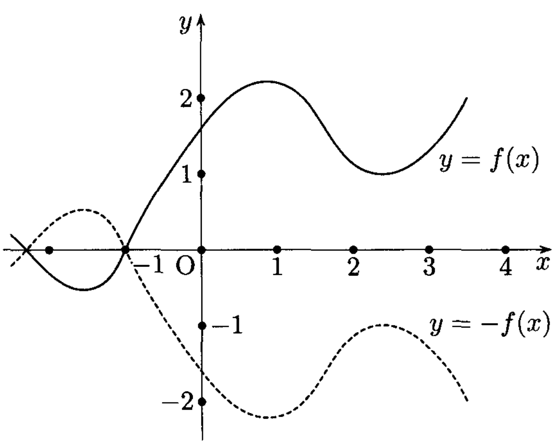


Рис. 16

На рис. 17 приведен пример построения графика уравнения $-y + \cos y - x = 0$ как кривой, симметричной графику уравнения $y + \cos y - x = 0$ относительно оси абсцисс.

График функции не может быть симметричен относительно оси абсцисс (это означало бы, что каждому значению аргумента x соответствуют два значения функции: y и $-y$, что противоречит определению функции).

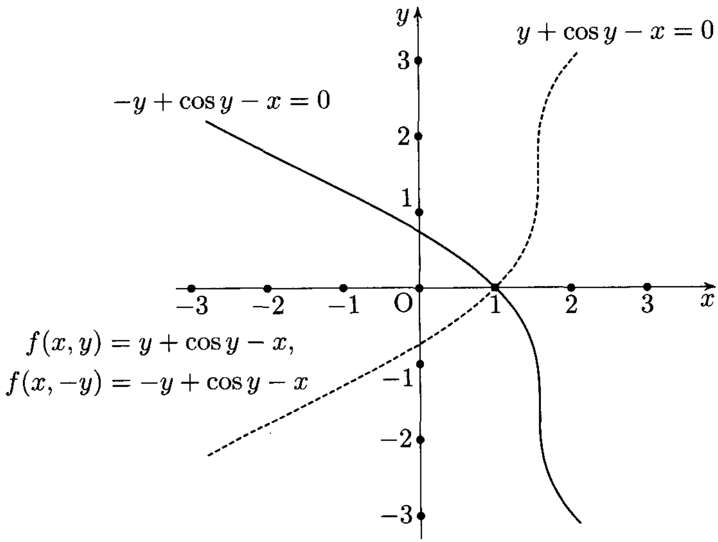


Рис. 17

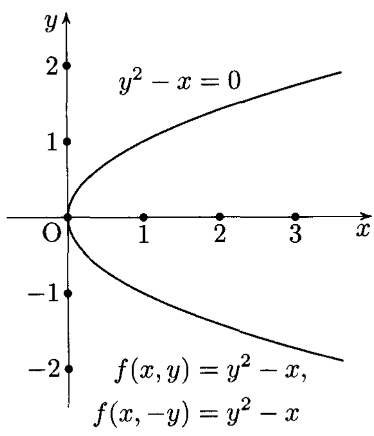


Рис. 18

График уравнения может быть симметричен относительно оси абсцисс, если $f(x, y) = f(x, -y)$. Например, график уравнения $y^2 - x = 0$ (см. рис. 18) симметричен относительно оси абсцисс, потому что

$y^2 - x = (-y)^2 - x$. Другим примером служит рассмотренный выше график уравнения $x^2 + y^2 = r^2$ (см. рис. 1). На рис. 19–23 приведены графики некоторых изучаемых в школе функций.

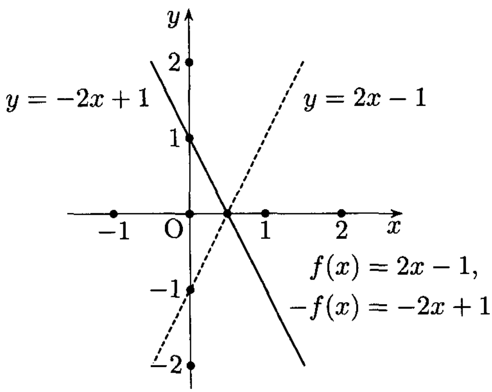


Рис. 19

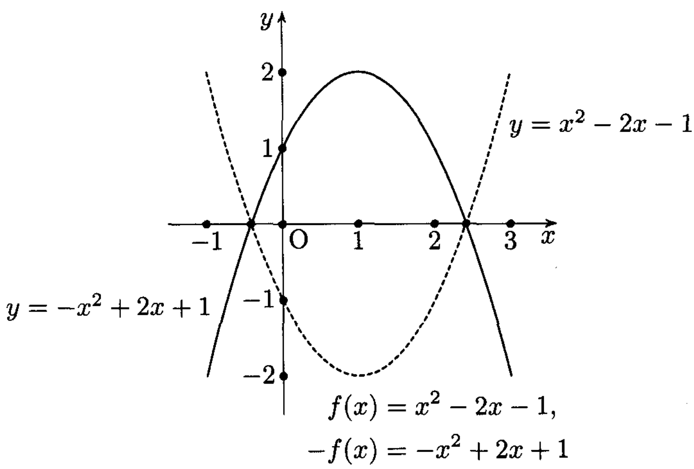


Рис. 20

Каждую из функций $y = -x$ и $y = -\dfrac{1}{x}$ можно рассматривать и как $f(-x)$, и как $-f(x)$. Поэтому их графики (см. рис. 7 и 10) симметричны как относительно оси абсцисс, так и относительно оси ординат (см. соответственно графики функций $y = x$ и $y = \dfrac{1}{x}$).

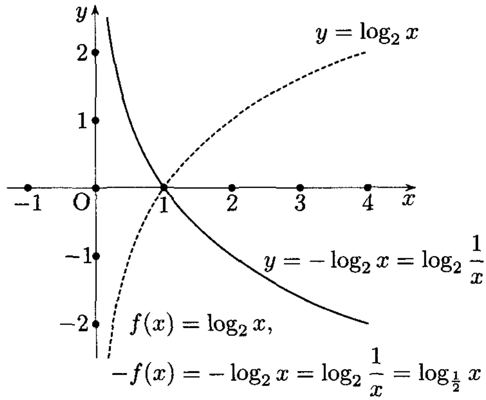


Рис. 21

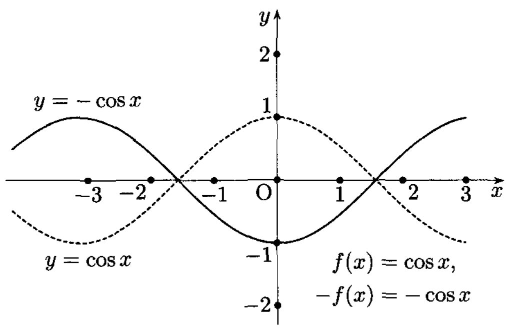


Рис. 22

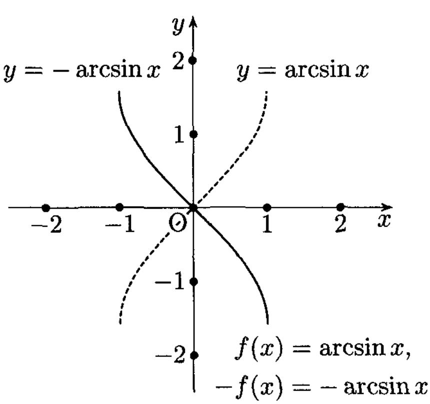


Рис. 23

Упражнения

Постройте графики функций.

7. $y = -x^2$.

8. $y = -\sin x$.

9. $y = -\operatorname{tg} x$.

10. $y = -\operatorname{ctg} x$.

11. $y = -\arccos x$.

12. $y = -\operatorname{arctg} x$.

13. $y = -\operatorname{arcctg} x$.

14. $y = -2^x$.

§ 3. Симметрия относительно прямой, параллельной оси абсцисс. Графики функций $f(x)$ и $a - f(x)$

Если две точки $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ симметричны относительно прямой $y = b$, параллельной оси абсцисс, то, как видно на рис. 24, должны выполняться условия

$$x = x_1, \quad y_1 - b = b - y.$$

Второе условие может быть записано в виде $y + y_1 = 2b$. Очевидно, справедливо и обратное утверждение: если координаты двух точек $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ удовлетворяют условиям

$$x = x_1, \quad y + y_1 = 2b,$$

то точки M и M_1 симметричны относительно прямой $y = b$.

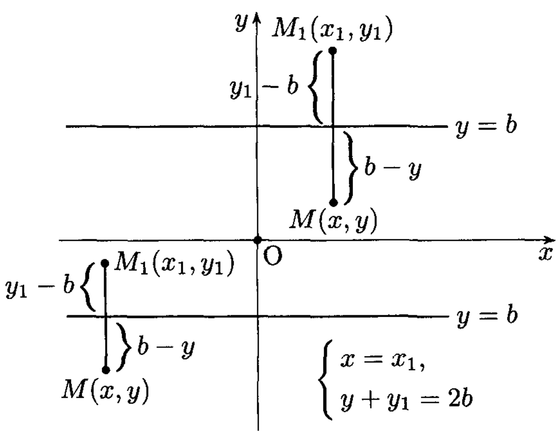


Рис. 24

Сформулированные выше взаимно обратные теоремы верны при любом значении b, как положительном, так и отрицательном (см. рис. 24). При $b = 0$ имеет место симметрия относительно оси абсцисс ($y + y_1 = 0$, или $y = -y_1$), рассмотренная в § 2. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению: *графики функций* $f(x)$ *и* $a - f(x)$ *симметричны относительно прямой* $y = \frac{a}{2}$ (см. рис. 25).

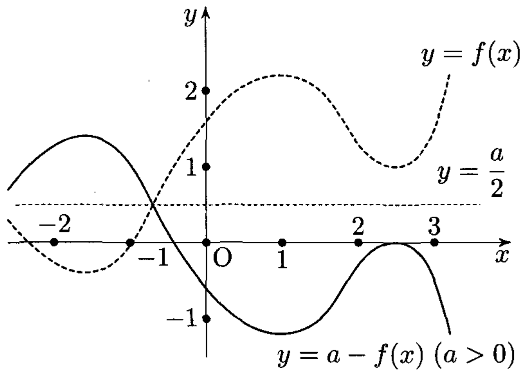


Рис. 25

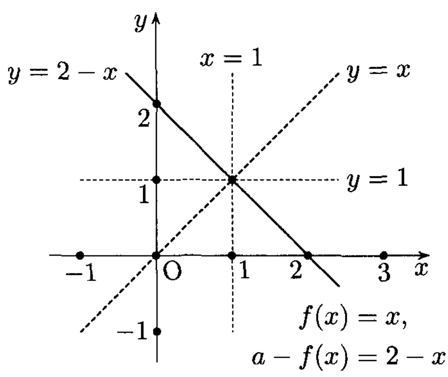


Рис. 26

Ниже приводятся примеры применения этого утверждения (см. рис. 26–30).

Другая точка зрения на построение графика функции $a - f(x)$ будет приведена в § 9. Для графиков уравнений, как нетрудно понять, мы получаем следующее правило: *графики уравнений* $f(x, y) = 0$ *и* $f(x, a - y) = 0$ *симметричны относительно прямой* $y = \frac{a}{2}$.

Пример: графики уравнений $x - y^2 = 0$ и $x - (a - y)^2 = 0$ (см. рис. 31).

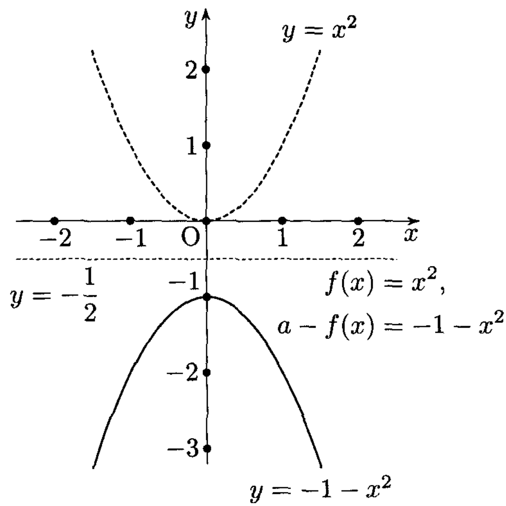


Рис. 27

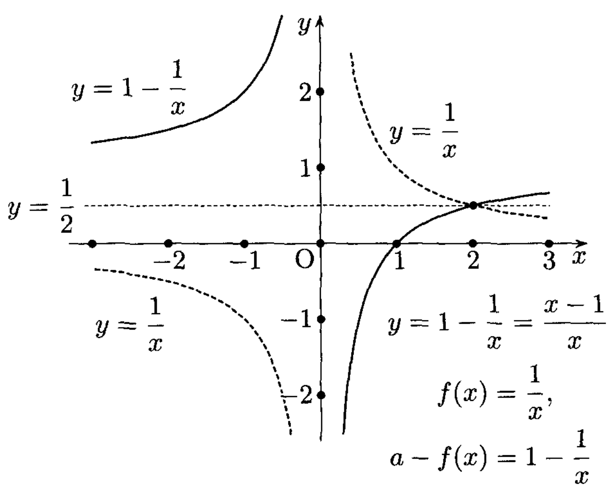


Рис. 28

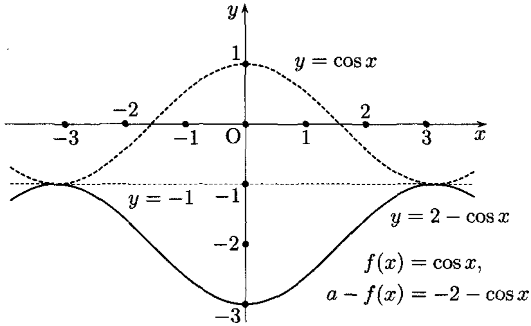


Рис. 29

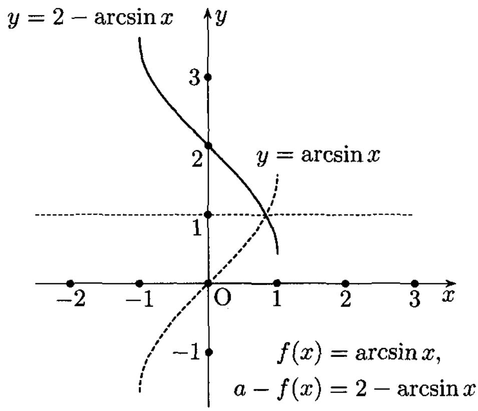


Рис. 30

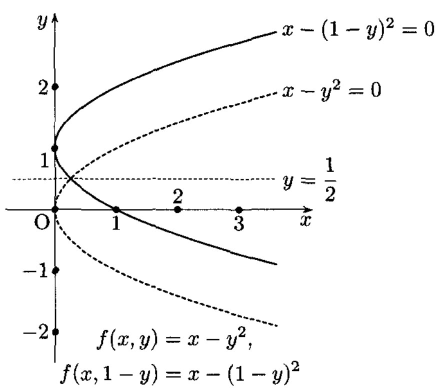


Рис. 31

Упражнения

Постройте графики функций.

15. $y = 3 - \sin x$.

16. $y = -1 - \arccos x$.

Постройте график уравнения.

17. $x^2 + (1 - y)^2 = 4$.

§ 4. Симметрия относительно прямой, параллельной оси ординат. Графики функций $f(x)$ и $f(a - x)$

Если две точки $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ симметричны относительно прямой $x = b$, параллельной оси ординат, то (см. рис. 32)

$$b - x_1 = x - b, \quad y = y_1,$$

или

$$x + x_1 = 2b, \quad y = y_1.$$

Справедливо, как легко заметить, и обратное утверждение: если координаты двух точек $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ удовлетворяют условиям

$$x + x_1 = 2b, \quad y = y_1,$$

то эти точки симметричны относительно прямой $x = b$.

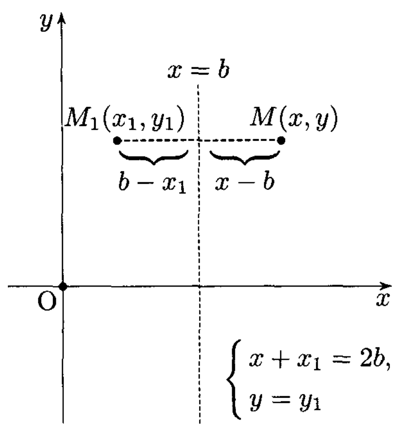


Рис. 32

На основании сформулированных выше теорем можно установить вид графика функции $f(a - x)$, если график функции $f(x)$ задан. Пусть

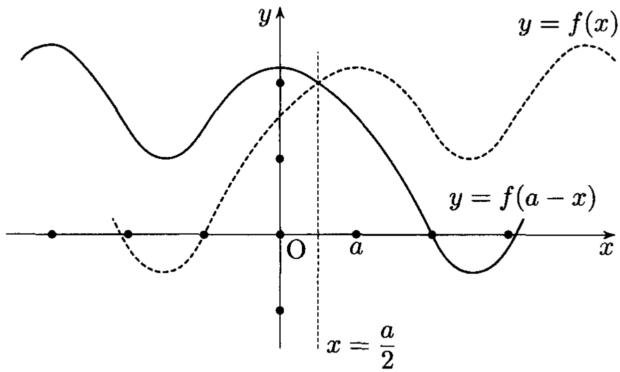


Рис. 33

точка $M(x, y)$ принадлежит графику функции $f(x)$. Графику функции $f(a-x)$ должна принадлежать точка M_1 с такой же ординатой y и абсциссой x_1, если $f(a-x_1) = f(x)$, т. е. если $a - x_1 = x$, или $x + x_1 = a$. Но ведь это есть условие симметричности точек M и M_1 относительно прямой $x = \frac{a}{2}$. Наше рассуждение применимо к любой точке графика функции $f(x)$, поэтому мы приходим к следующему правилу: *графики функций $f(x)$ и $f(a-x)$ симметричны относительно прямой $x = \frac{a}{2}$* (см. рис. 33).

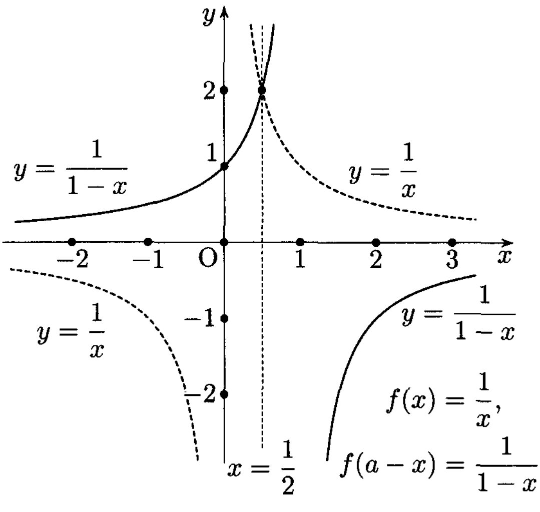


Рис. 34

Приведем несколько примеров построения графиков функции $f(a-x)$ (см. рис. 34–38).

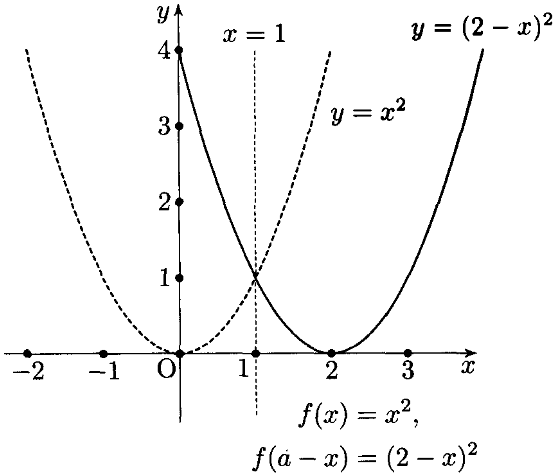


Рис. 35

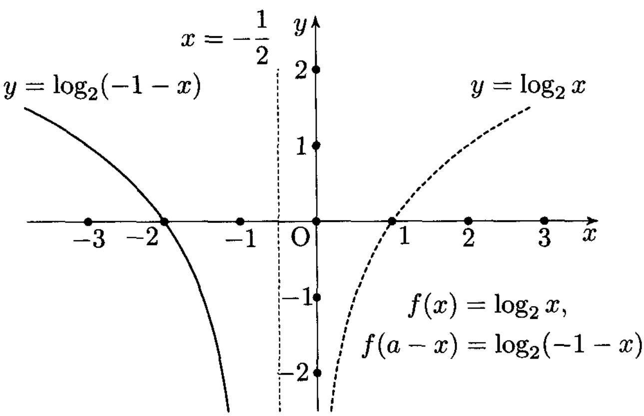


Рис. 36

Заметим, что график функции $y = 2 - x$ можно рассматривать с двух точек зрения: во-первых, как график функций $a - f(x)$, если $f(x) = x$ (так он был построен на рис. 26), а во-вторых — как график функции $f(a - x)$, где $f(x) = x$ (тогда мы получим этот график как прямую, симметричную прямой $y = x$ относительно оси симметрии $x = 1$; см. рис. 26).

Другая точка зрения на построение графиков функций $f(a - x)$ будет изложена в § 8.

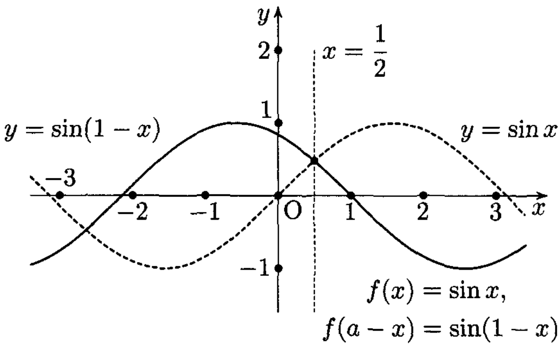


Рис. 37

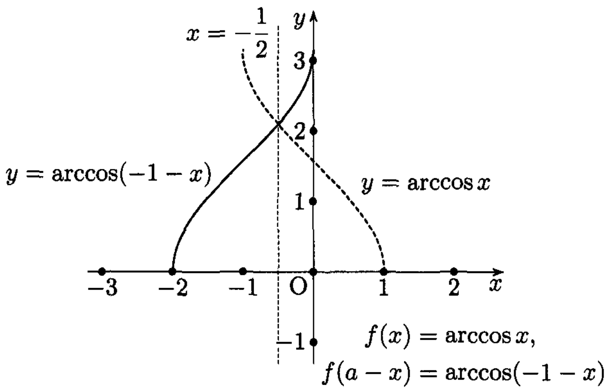


Рис. 38

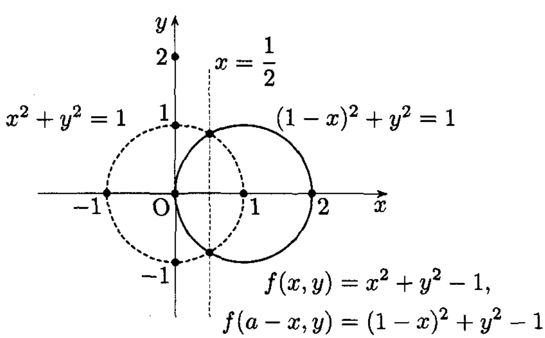


Рис. 39

Для графиков уравнений мы получаем следующее правило: *графики уравнений* $f(x,y)=0$ *и* $f(a-x,y)=0$ *симметричны относительно прямой* $x=\frac{a}{2}$.

Пример: графики уравнений $x^2+y^2=1$ и $(1-x)^2+y^2=1$ (см. рис. 39).

Упражнения

Постройте графики функций.

18. $y=2^{-x}$.

19. $y=\operatorname{tg}(1-x)$.

20. $y=\arcsin(-2-x)$.

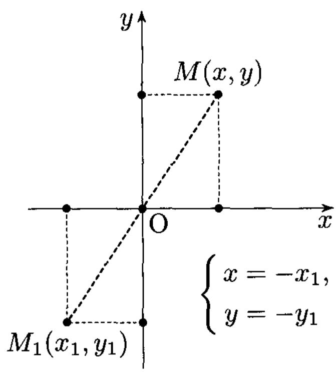
Постройте график уравнения.

21. $y^2+x-1=0$.

§ 5. Центральная симметрия относительно начала координат. Графики функций $f(x)$ и $-f(-x)$

Если две точки $M(x,y)$ и $M_1(x_1,y_1)$ симметричны относительно начала координат (см. рис. 40), то их координаты, как это следует из определения центральной симметрии и видно на рис. 40, удовлетворяют соотношениям

$$x=-x_1,\quad y=-y_1.$$



$$\begin{cases} x=-x_1, \\ y=-y_1 \end{cases}$$

Рис. 40

Справедливо и обратное утверждение, т. е. если координаты двух точек $M(x,y)$ и $M_1(x_1,y_1)$ связаны соотношениями

$$x=-x_1,\quad y=-y_1,$$

то точки M и M_1 центрально-симметричны относительно начала координат.

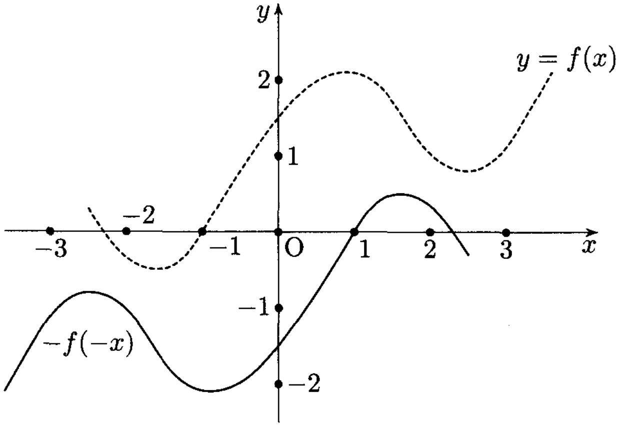


Рис. 41

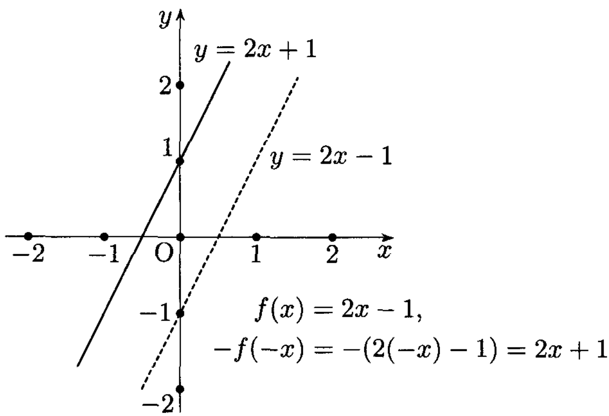


Рис. 42

На основании этого рассуждения легко установить, что если какая-либо точка $M(x, y)$ принадлежит графику функции $f(x)$, то точка $M_1(-x, -y)$, центрально-симметричная ей относительно начала координат, должна принадлежать графику функции $-f(-x)$.

Мы приходим к следующей теореме: *графики функций* $f(x)$ *и* $-f(-x)$ *центрально-симметричны относительно начала координат* (см. рис. 41).

Если функция $f(x)$ нечетна, т. е. $f(-x) = -f(x)$, или $f(x) = -f(-x)$, то ее график центрально-симметричен относительно начала координат; таковы, например, графики функций $y = x$; $y = \sin x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \dfrac{1}{x}$.

Приведем несколько примеров построения графиков $-f(-x)$ (см. рис. 42–45).

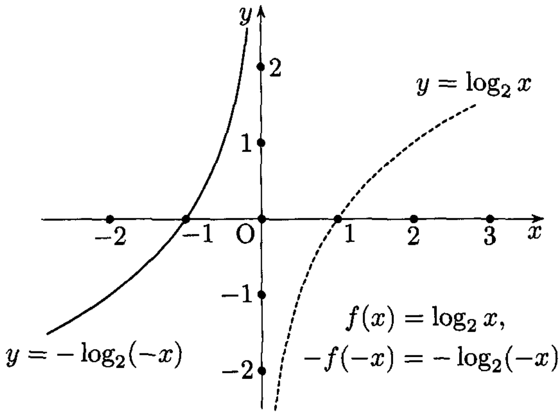


Рис. 43

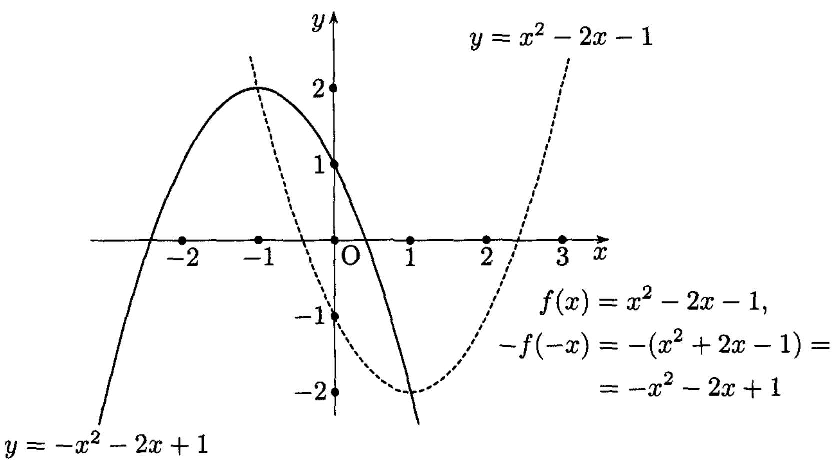


Рис. 44

Для графиков уравнений получим следующее правило: *графики уравнений* $f(x, y) = 0$ *и* $f(-x, -y) = 0$ *центрально симметричны относительно начала координат* (см. рис. 46).

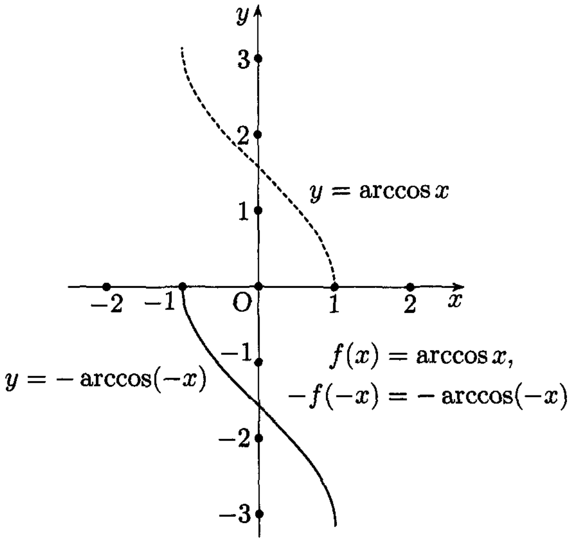


Рис. 45

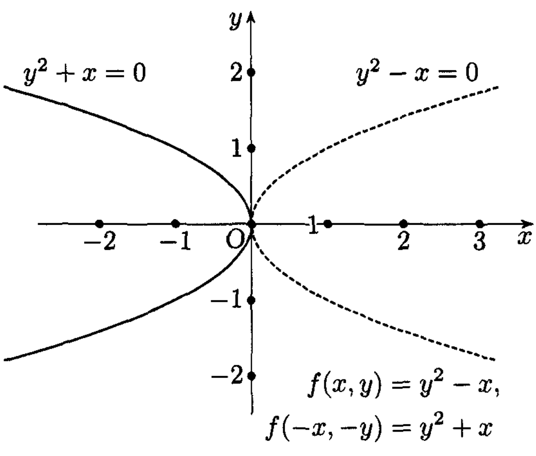


Рис. 46

Упражнения

Постройте графики функций.

22. $y = -2^{-x}$.

23. $y = -\operatorname{arctg}(-x)$.

Постройте график уравнения.

24. $\cos y - y + x = 0$ (см. рис. 14).

ГЛАВА 2
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

§ 6. Параллельный перенос вдоль оси абсцисс. Графики функций $f(x)$ и $f(x+a)$

Если координаты двух точек $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ удовлетворяют условиям

$$x_1 = x + b, \quad y_1 = y,$$

то можно считать, что точка M_1 получена путем переноса точки M вдоль прямой, параллельной оси абсцисс, на отрезок MM_1 (см. рис. 47) вправо, если $b > 0$, или влево, если $b < 0$.

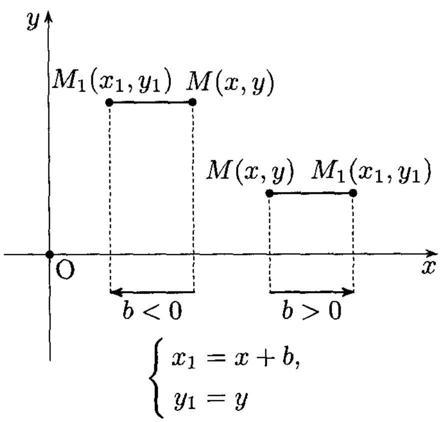


Рис. 47

Очевидно, что если какая-либо точка $M(x, y)$ плоскости перенесена параллельно оси абсцисс на отрезок b ($b > 0$) вправо, то новые координаты (x_1, y_1) перенесенной точки удовлетворяют соотношениям

$$x_1 = x + b, \quad y_1 = y,$$

и аналогично при переносе на b влево

$$x_1 = x - b, \quad y_1 = y.$$

Эти соображения позволяют установить вид графика функции $f(x+a)$.

Пусть какая-нибудь точка $M(x, y)$ принадлежит графику $f(x)$; тогда графику функции $f(x+a)$ должна принадлежать точка M_1 с такой же ординатой и абсциссой x_1, если $f(x_1+a)=f(x)$, т. е. если $x_1+a=x$, или $x_1-x=-a$.

Это означает, что точка M_1 получается путем параллельного переноса вдоль оси абсцисс точки M на отрезок a вправо, если $a<0$, или влево, если $a>0$.

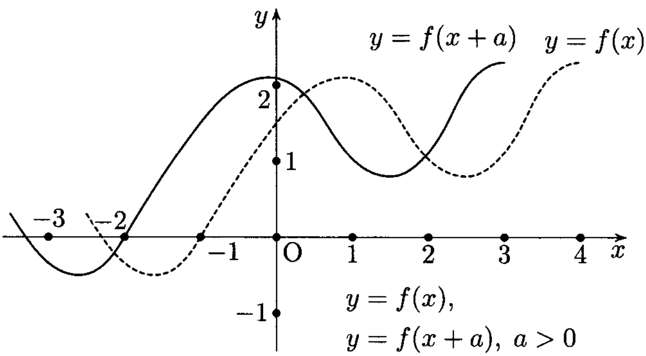


Рис. 48

Рассуждения, проведенные по отношению к точке M графика функции $f(x)$, справедливы по отношению к любой точке этого графика, поэтому мы приходим к выводу: *график функции $f(x+a)$ есть результат параллельного переноса графика функции $f(x)$ по направлению оси абсцисс на а единиц влево при $a>0$ или на а единиц вправо при $a<0$* (см. рис. 48).

По отношению к графикам уравнений получим следующее правило: *график уравнения $f(x+a, y)=0$ есть результат параллельного переноса графика уравнения $f(x, y)=0$ на а единиц влево, если $a>0$, или на а единиц вправо, если $a<0$.*

Рассмотрим несколько примеров.

График функции $x+2$ можно рассматривать как график функции $f(x+a)$, где $a=2$ и $f(x)=x$ (см. рис. 49). Он получается путем соответствующего параллельного переноса прямой $y=x$.

Ниже приводятся другие примеры параллельного переноса графиков функций вдоль оси абсцисс (см. рис. 50–55). На рис. 56 представлен параллельный перенос графика уравнения.

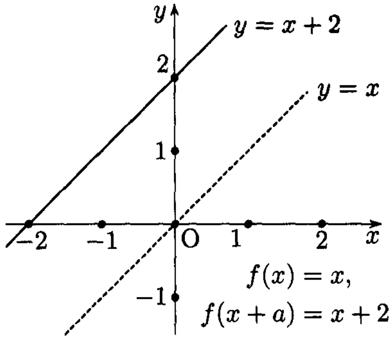


Рис. 49

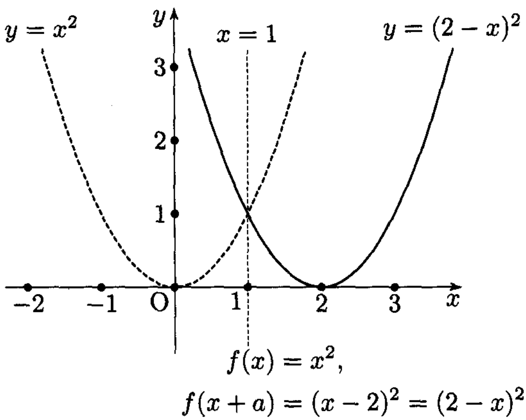


Рис. 50

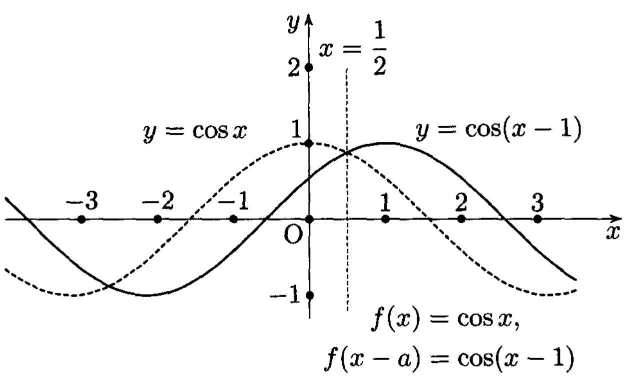


Рис. 51

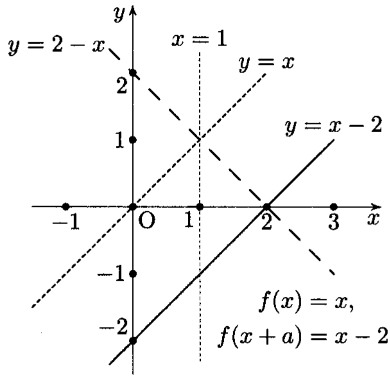


Рис. 52

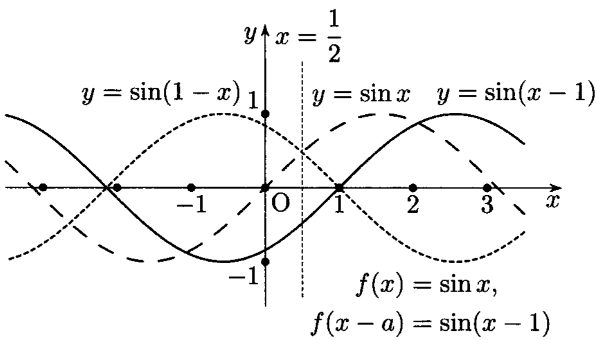


Рис. 53

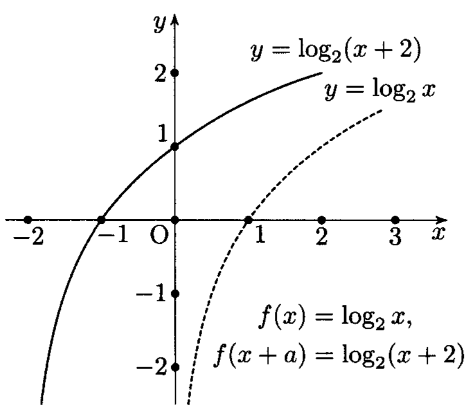


Рис. 54

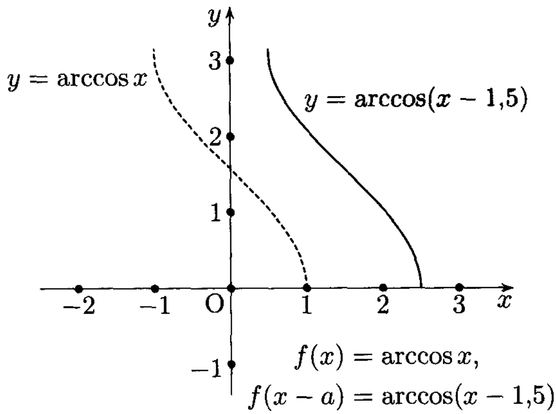


Рис. 55

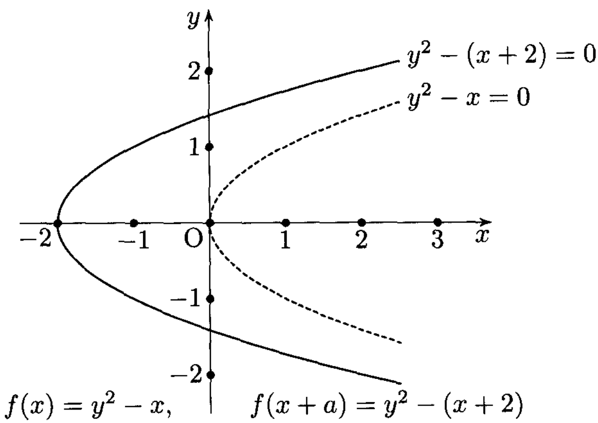


Рис. 56

Для четных функций $f(x-a)=f(a-x)$. Поэтому график функции $f(x-a)$ можно рассматривать и как результат параллельного переноса на a единиц (вправо при $a>0$) графика функции $f(x)$, и как результат симметрии относительно оси $x=\dfrac{a}{2}$ графика $f(x)$ (см. рис. 50, 51).

Для нечетных функций $f(x-a)=-f(a-x)$. Таким образом, график функции $f(x-a)$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $f(x)$ на a единиц (вправо при $a>0$), а также в результате симметрии графика функции $f(x)$ относительно оси $x = \frac{a}{2}$ и последующей симметрии относительно оси абсцисс (см. рис. 52, 53).

Для функций, не являющихся ни четными, ни нечетными, такое двойное толкование графика $f(x+a)$ невозможно (см. рис. 54, 55).

Упражнения

Постройте графики функций.

25. $y = \frac{1}{x-1}$.

26. $y = 2^{x+2}$.

27. $y = \arcsin(x-2)$.

Постройте график уравнения.

28. $(x+2)^2 + y^2 = 4$.

§ 7. Параллельный перенос вдоль оси ординат. Графики функции $f(x)$ и $f(x)+a$

Если координаты двух точек $M(x,y)$ и $M_1(x_1,y_1)$ удовлетворяют условиям

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + a,$$

то можно считать, что точка M_1 получена путем переноса точки M вдоль прямой, параллельной оси ординат, на отрезок MM_1 (см. рис. 57) вверх, если $a > 0$, или вниз, если $a < 0$.

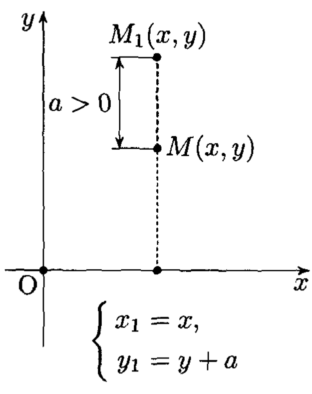


Рис. 57

Справедливо и обратное утверждение, именно: если точка $M(x,y)$ перенесена вдоль прямой, параллельной оси ординат, на отрезок a вверх

$(a > 0)$, то координаты x_1, y_1 полученной точки удовлетворяют соотношениям

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + a.$$

На основании этих рассуждений мы заключаем, что если какая-нибудь точка $M(x, y)$ принадлежит графику функции $f(x)$, то точка $M_1(x_1, y_1)$ должна принадлежать графику функции $f(x) + a$, если

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + a.$$

Таким образом, *график функции $y = f(x) + a$ есть результат переноса графика $f(x)$ на a единиц вверх, если $a > 0$, или на a единиц вниз, если $a < 0$* (см. рис. 58).

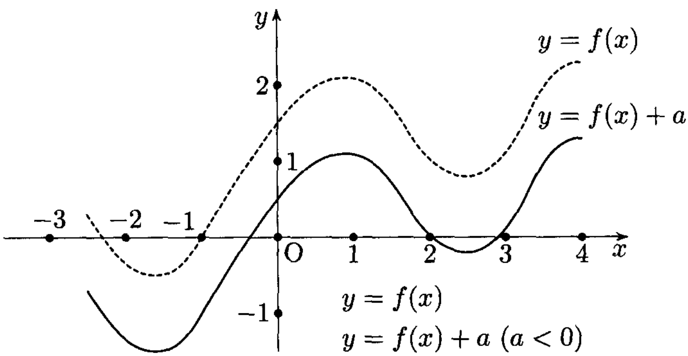


Рис. 58

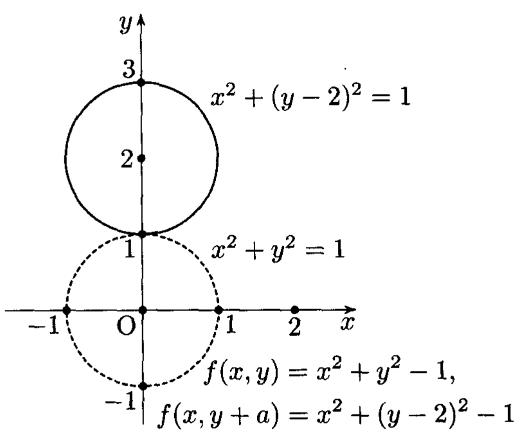


Рис. 59

Чтобы установить вид графика уравнения $f(x, y + a) = 0$ по отношению к графику уравнения $f(x, y) = 0$, предположим, что уравнением $f(x, y) = 0$ определяется какая-нибудь функция $y = \varphi(x)$ (уравнением $f(x, y) = 0$ может определяться несколько функций, этот случай рассмотрен ниже), тогда уравнением $f(x, y + a) = 0$ определяется функция $y + a = \varphi(x)$, или $y = \varphi(x) - a$.

График функции $\varphi(x) - a$, как установлено выше, образуется параллельным переносом графика функции $\varphi(x)$ на a единиц вниз, если $a > 0$, или вверх, если $a < 0$. Но ведь график функции $\varphi(x)$ совпадает с графиком уравнения $f(x, y) = 0$, поэтому *график уравнения $f(x, y + a) = 0$ образуется путем параллельного переноса графика уравнения $f(x, y) = 0$ на a единиц вниз, если $a > 0$, или на a единиц вверх, если $a < 0$.*

Если уравнением $f(x, y) = 0$ определяются несколько функций:

$$y_1 = \varphi_1(x), \ \ y_2 = \varphi_2(x), \ \ \ldots,$$

то, применяя к каждой из них приведенное выше рассуждение, приходим к тому же заключению относительно графика уравнения $f(x, y + a) = 0$ (см. пример на рис. 59).

На рис. 52 изображен график функции $y = x - 2$. В § 6 этот график рассматривался как результат параллельного переноса графика функции $y = x$ вдоль оси абсцисс. Теперь можно его рассмотреть и как график функции $f(x) + a$, если $f(x) = x$; тогда график $y = x - 2$ получается путем параллельного переноса графика $y = x$ на 2 единицы вниз.

На рис. 60 и 61 представлены примеры параллельного переноса графиков функций вдоль оси ординат.

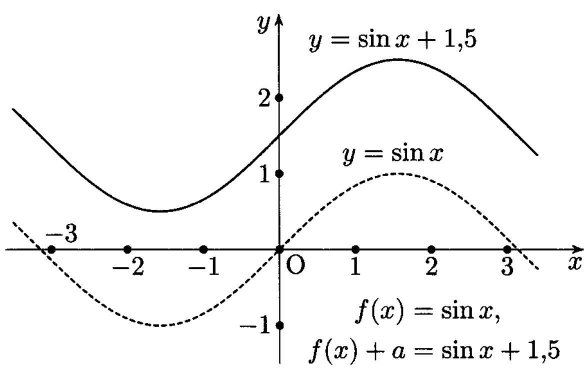


Рис. 60

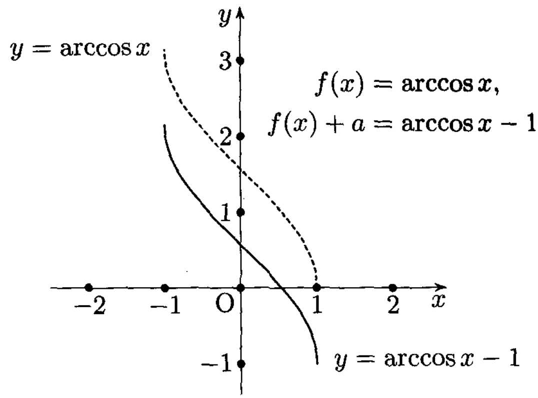


Рис. 61

Упражнения

Постройте графики функций.

29. $y = x^2 - 2$.

30. $y = \dfrac{1-x}{x}$ $\left(y = \dfrac{1}{x} - 1\right)$.

Постройте график уравнения.

31. $(y-1)^2 - x = 0$.

§ 8. Параллельный перенос вдоль оси абсцисс и симметрия относительно прямой, параллельной оси ординат. Графики функций $f(x)$ и $f(a-x)$

С графиком функции $f(a-x)$ читатель познакомился в § 4, где было установлено, что этот график есть результат симметрии графика $f(x)$ относительно прямой $x = \dfrac{a}{2}$. Теперь, в связи с введением параллельного переноса, имеется возможность другой точки зрения на график функции $f(a-x)$.

Представим $f(a-x)$ в виде $f(-(x-a))$; график такой функции можно получить в результате параллельного переноса графика функции $f(x)$ на a единиц (вправо или влево, в зависимости от знака a) и последующей симметрии относительно оси $x = a$. Действительно, ведь графики функций $f(x)$ и $f(-x)$ симметричны относительно оси ординат, т. е. относительно прямой $x = 0$, поэтому графики функций $f(x-a)$ и $f(-(x-a))$ должны быть симметричны относительно прямой $x - a = 0$, т. е. прямой $x = a$.

С точки зрения удобства построения способ, изложенный в § 4, следует предпочесть только что указанному способу, потому что в первом случае требуется только одно преобразование (одна осевая симметрия), тогда как во втором случае нужны два преобразования: параллельный перенос и осевая симметрия.

На рис. 34–38 представлены графики функций $f(a-x)$. Предлагаем читателю убедиться, что каждый из них может быть получен в результате параллельного переноса и симметрии. В качестве примера приведем построение графика функции $y = \arccos(-1-x)$ (рис. 62). Сравните рис. 38 и 62.

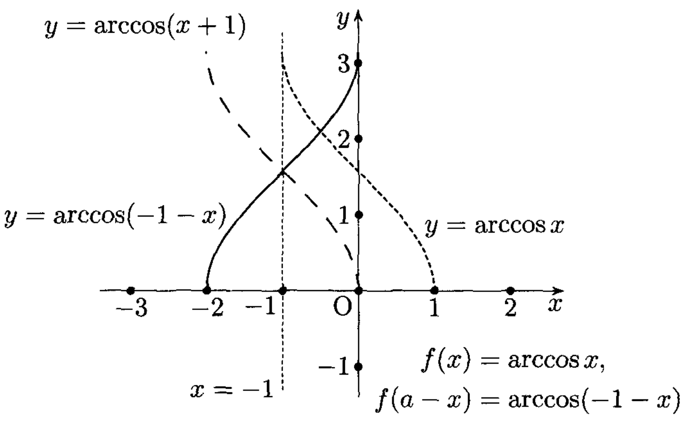


Рис. 62

Упражнения

Постройте графики функций, изображенные на рис. 34, 35, 36, 37 и предложенные в упражнениях 18, 19, 20, способом, указанным в настоящем параграфе.

§ 9. Параллельный перенос вдоль оси ординат и симметрия относительно прямой, параллельной оси абсцисс. Графики функций $f(x)$ и $a - f(x)$

В § 3 было установлено, что график функции $a - f(x)$ есть результат симметрии графика функции $f(x)$ относительно прямой $y = \frac{a}{2}$. Однако очевидно, что график функции $a - f(x)$ можно рассматривать как результат симметрии графика $f(x)$ относительно оси абсцисс (график функции $-f(x)$) и последующего параллельного переноса на a единиц (вверх или вниз, к зависимости от знака a).

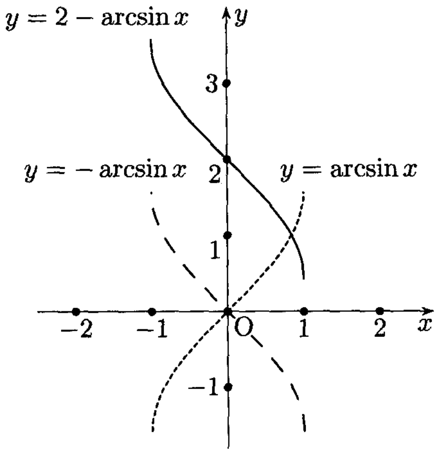


Рис. 63

Такая точка зрения на график функции $a - f(x)$ требует для построения графика двух операций: осевой симметрии и параллельного переноса; поэтому предпочтительней пользоваться правилом из § 3, при котором для построения требуется только одна осевая симметрия. Для иллюстрации указанного в настоящем параграфе способа построения графика $a - f(x)$ приведем пример (рис. 63). Сравните рис. 63 и 30.

Упражнения

Постройте указанным в § 9 способом графики функций, изображенные на рис. 26–29 и предложенные в упражнениях 13 и 16.

ГЛАВА 3

РАВНОМЕРНЫЕ ОСЕВЫЕ СЖАТИЯ ИЛИ РАСТЯЖЕНИЯ

§ 10. Равномерное сжатие к оси абсцисс. Графики функций $f(x)$ и $kf(x)$

Если координаты двух точек $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ удовлетворяют соотношениям

$$x_1 = x, \quad y_1 = ky,$$

то можно считать, что точка M_1 получена путем растяжения ординаты точки M в k раз, если $k > 1$ (см. рис. 64).

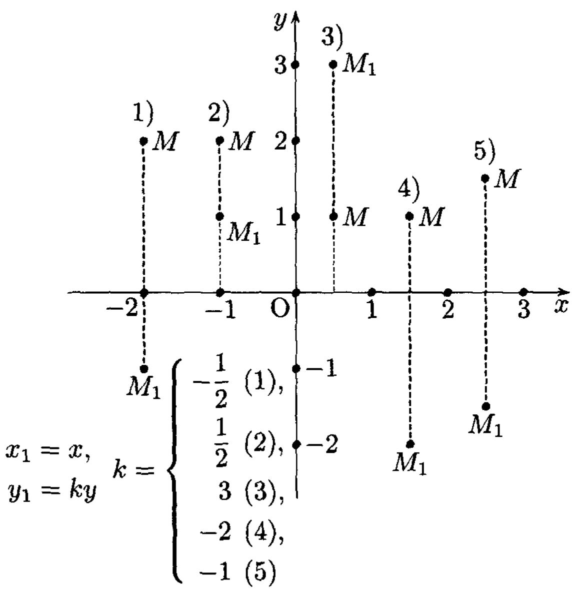


Рис. 64

При $0 < k < 1$ точка M_1 получается в результате сжатия ординаты точки M в $\frac{1}{k}$ раз.

Справедливо и обратное утверждение: если координатная плоскость подвергнута равномерному сжатию к оси абсцисс с коэффициентом сжатия k, то координаты любой точки M_1, соответствующей точке M до сжатия, выражаются соотношениями

$$x_1 = x, \quad y_1 = ky.$$

При $k = 1$ имеет место так называемое тождественное преобразование, т. е. все точки плоскости остаются на своих местах. При $k < 0$ к преобразованию сжатия присоединяется симметрия относительно оси абсцисс. При $k = -1$, как легко понять, имеет место только симметрия относительно оси абсцисс (см. рис. 64).

График функции $kf(x)$ можно рассматривать как результат сжатия (или растяжения) графика $f(x)$ к оси абсцисс. Действительно, каждой точке $M(x, y)$ графика функции $f(x)$ соответствует точка $M_1(x, ky)$ графика $kf(x)$. Поэтому мы получаем следующее правило построения графика функции $y = kf(x)$: *график функции $kf(x)$ есть результат сжатия графика функции $f(x)$ к оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз при* $0 < k < 1$ *или растяжения графика функции $f(x)$ от оси абсцисс в k раз при $k > 1$. При $k < 0$ к преобразованию сжатия с коэффициентом, равным $|k|$, присоединяется симметрия относительно оси абсцисс* (см. рис. 65).

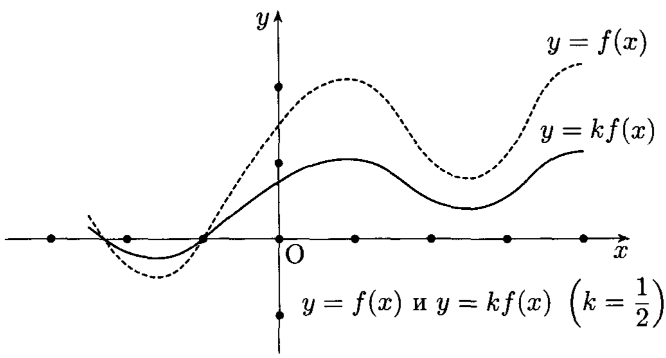


Рис. 65

График функции $y = 2x$ может быть построен как результат растяжения в 2 раза графика функции $y = x$ (см. рис. 66) от оси абсцисс. На рис. 67–69 приведены примеры графиков функций $y = kf(x)$.

Рассматривая график уравнения $f(x, y) = 0$ как совокупность графиков функций $y = \varphi(x)$, определяемых уравнением $f(x, y) = 0$, приходим к выводу: *график уравнения $f(x, ky) = 0$ есть результат*

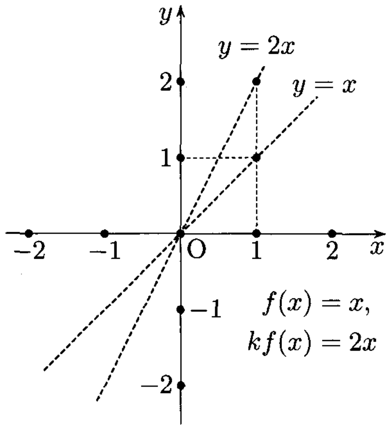


Рис. 66

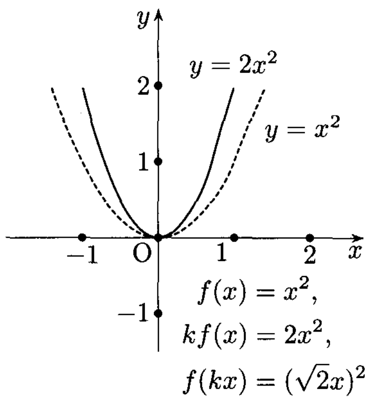
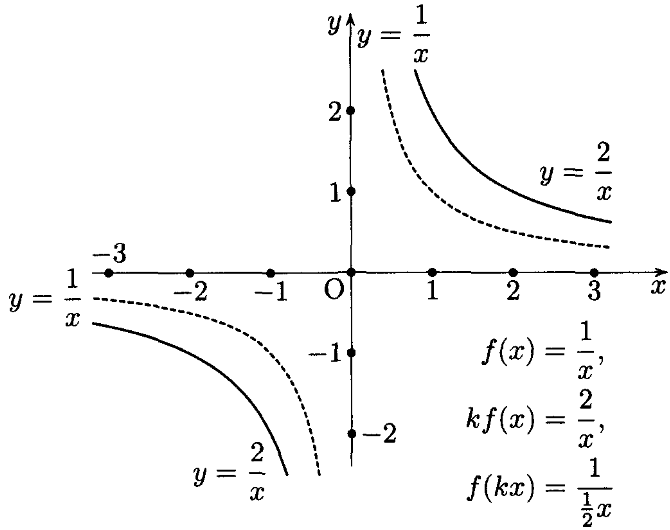


Рис. 67

сжатия в k раз к оси абсцисс графика уравнения $f(x, y) = 0$ при $k > 1$ или растяжения в $\frac{1}{k}$ раз при $0 < k < 1$. При $k < 0$ к преобразованию сжатия присоединяется симметрия относительно оси абсцисс.

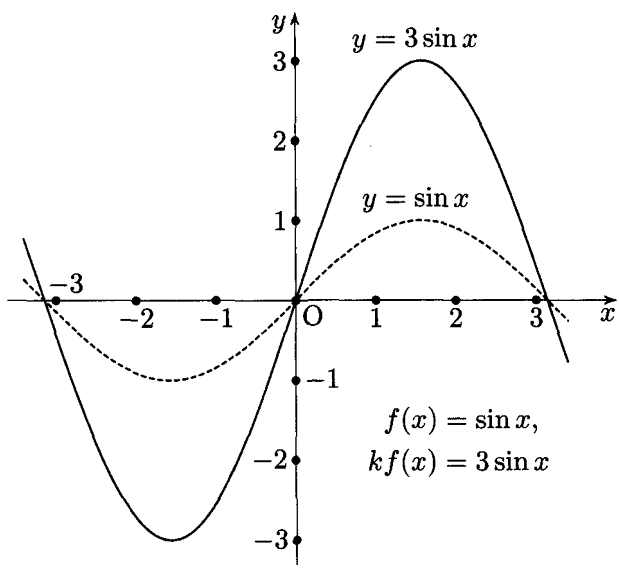
Действительно, если уравнением $f(x, y) = 0$ определяется функция $y = \varphi(x)$, то уравнением $f(x, ky) = 0$ определяется функция $ky = \varphi(x)$, или $y = \frac{1}{k}\varphi(x)$.

Приведем пример построения графика уравнения $x^2 + k^2y^2 = 1{,}5^2$ при $k = 2$ (см. рис. 70). Полученная кривая (результат сжатия окружности) называется эллипсом.



y
$y = \frac{1}{x}$
$y = \frac{2}{x}$
$y = \frac{1}{x}$
$y = \frac{2}{x}$
x
O
$f(x) = \frac{1}{x}$,
$kf(x) = \frac{2}{x}$,
$f(kx) = \frac{1}{\frac{1}{2}x}$

Рис. 68



y
$y = 3\sin x$
$y = \sin x$
x
O
$f(x) = \sin x$,
$kf(x) = 3\sin x$

Рис. 69

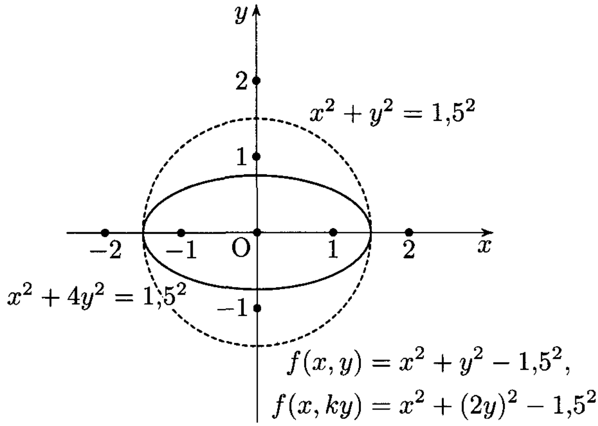


Рис. 70

Упражнения

Постройте графики функций.

32. $y = -\dfrac{1}{2x}$.

33. $y = -\dfrac{1}{2} - \cos x$.

34. $y = 2 \arcsin x$.

35. $y = \dfrac{1}{10}(x-1)^2$.

Постройте график уравнения.

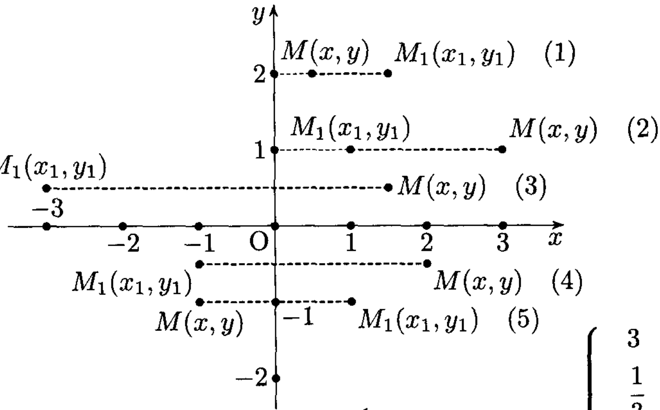
36. $(2y)^2 - x = 0$.

§ 11. Равномерное сжатие к оси ординат. Графики функций $f(x)$ и $f(kx)$

Если координаты двух точек $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ удовлетворяют соотношениям

$$x_1 = mx, \quad y_1 = y,$$

то можно считать, что точка M_1 получена путем растяжения абсциссы точки M от оси ординат в m раз, если $m > 1$, или сжатия в $\dfrac{1}{m}$ раз, если $0 < m < 1$ (см. рис. 71). Если $m < 0$, то к преобразованию сжатия или растяжения с коэффициентом, равным m, присоединяется симметрия относительно оси ординат (см. рис. 71). Справедливо и обратное утверждение: если координатная плоскость подвергнута сжатию-растяжению к оси ординат с коэффициентом сжатия, равным m, то любая точка



$$\begin{cases} x_1 = mx, \\ y_1 = y, \end{cases} \qquad m = \begin{cases} 3 & (1), \\ \frac{1}{3} & (2), \\ -2 & (3), \\ -\frac{1}{2} & (4), \\ -1 & (5) \end{cases}$$

Рис. 71

$M(x, y)$ переходит в точку $M_1(x_1, y_1)$ и координаты точек M и M_1 связаны соотношениями

$$x_1 = mx, \quad y_1 = y.$$

Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, тогда графику функции $f(kx)$ должна принадлежать точка M_1 с такой же ординатой и абсциссой x_1, если $f(kx_1) = f(x)$, т. е. если $kx_1 = x$, или $x_1 = \frac{1}{k}x$. Можно считать, что точка M_1 получена в результате растяжения абсциссы точки M от оси ординат в k раз, если $k > 1$, или сжатия в $\frac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$.

Применяя эти рассуждения к любой точке графика $f(kx)$, приходим к следующему выводу: *график функции $f(kx)$ есть результат сжатия к оси ординат графика $f(x)$ в k раз, если $k > 1$, или растяжения от оси ординат в $\frac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$. При $k < 0$ к преобразованию сжатия присоединяется симметрия относительно оси ординат* (см. рис. 72).

В § 10 мы рассматривали график функции $y = 2x$ как график функции $y = kf(x)$, считая, что $f(x) = x$; но функцию $y = 2x$ можно рассматривать и как $f(kx)$, и с этой точки зрения график функции $y = 2x$ получается в результате сжатия в 2 раза к оси ординат графика функции $y = x$ (см. рис. 66). На рис. 73–75 приведены примеры преобразования сжатия к оси графиков некоторых функций.

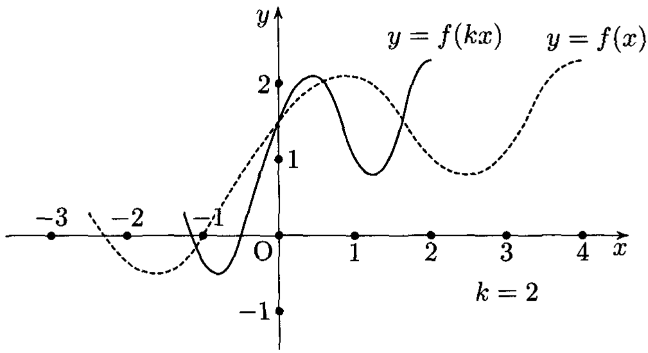


Рис. 72

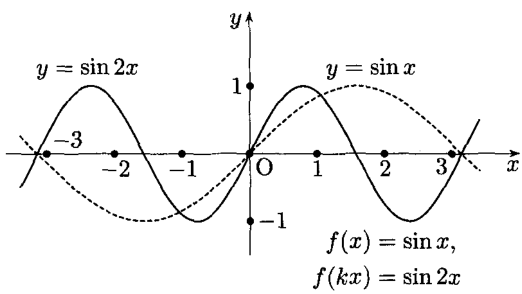


Рис. 73

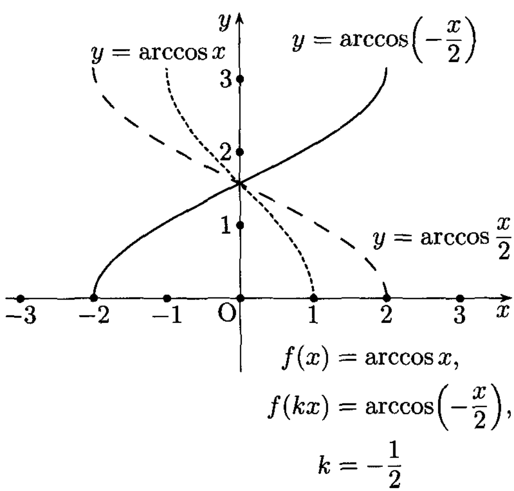


Рис. 74

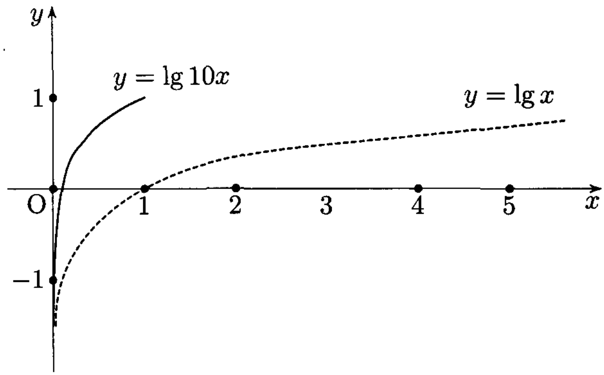


Рис. 75

Графики функций $y = 2x^2$ (см. рис. 67) и $y = \dfrac{2}{x}$ (см. рис. 68) также допускают двойное толкование. В § 10 эти графики рассматривались как результат сжатия-растяжения по отношению к оси абсцисс. Однако функцию $2x^2$ можно представить в виде $(x\sqrt{2})^2$, т. е. в виде $f(kx)$, где $f(x) = x^2$. Поэтому график функции $y = 2x^2$ получается путем сжатия в $\sqrt{2}$ раз графика функции $y = x^2$ к оси ординат. Функцию $y = \dfrac{2}{x}$ можно представить в виде $y = \dfrac{2}{\frac{1}{2}x}$, т. е. в виде $f(kx)$; тогда ее график получается путем растяжения в 2 раза от оси ординат графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ (см. рис. 68).

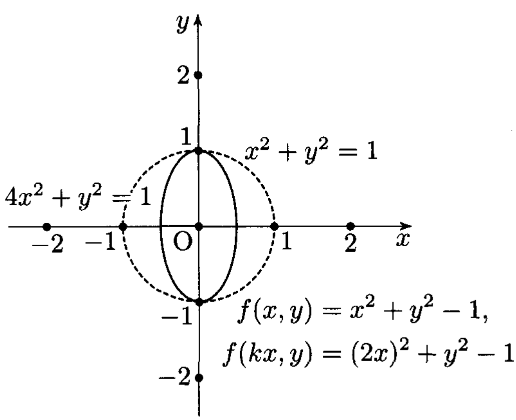


Рис. 76

Нетрудно видеть, что для графиков уравнения вида $f(kx, y) = 0$ получается следующее правило: *график уравнения* $f(kx, y) = 0$ *есть* *результат сжатия в k раз при $k > 1$ графика уравнения $f(x, y) = 0$ к оси ординат или растяжения в $\frac{1}{k}$ раз при $0 < k < 1$ от оси ординат графика уравнения $f(x, y) = 0$. Если $k < 0$, то к преобразованию сжатия присоединяется симметрия относительно оси ординат.*

В качестве примера приведен график уравнения $(2x)^2 + y^2 = 1$ (см. рис. 76).

Упражнения

Постройте графики функций.

37. $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

38. $y = \operatorname{arctg} x$.

Постройте график уравнения.

39. $y^2 - 2x = 0$.

§ 12. Гомотетия относительно начала координат. Графики функций $f(x)$ и $kf\left(\frac{x}{k}\right)$

Как известно, преобразование гомотетии с центром в точке O и коэффициентом гомотетии k можно рассматривать как произведение двух осевых сжатий с одинаковыми коэффициентами относительно взаимно перпендикулярных и пересекающихся в точке O осей.

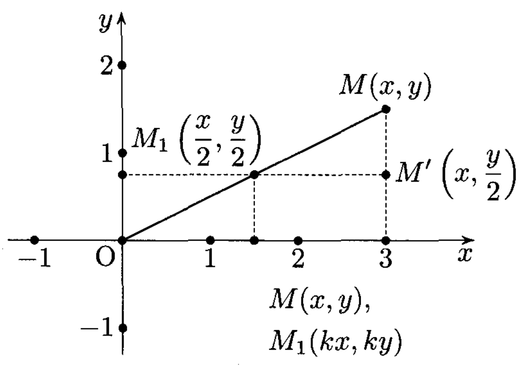


Рис. 77

Действительно, пусть оси OX и OY служат осями сжатия с равными коэффициентами k. Тогда в результате сжатия к оси абсцисс точка M перейдет в точку M' (см. рис. 77), а точка M' в результате сжатия к оси ординат перейдет в точку M_1.

Как нетрудно доказать, точки M и M_1 должны лежать на прямой, проходящей через точку O, а отношение расстояний от этих точек до точки O равно коэффициенту сжатия. Именно такими свойствами должна обладать точка M_1, если на плоскости осуществлена гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом гомотетии k и точка M_1 соответствует точке M.

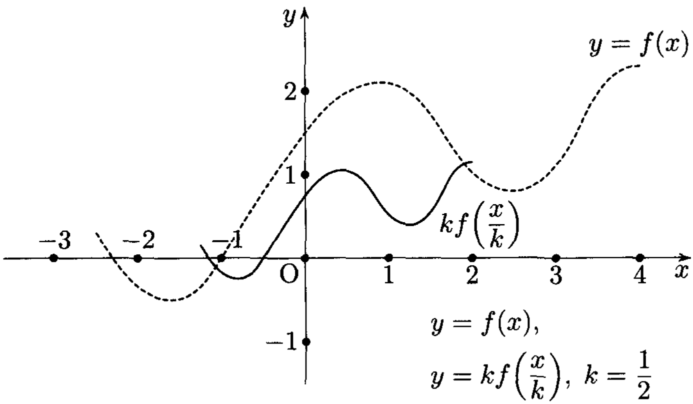


Рис. 78

Рассматривая график функции $kf\left(\frac{x}{k}\right)$, мы приходим к выводу, что он представляет собой результат гомотетичного преобразования графика функции $f(x)$ с центром гомотетии в начале координат и коэффициентом гомотетии k.

Действительно, пусть графику функции $f(x)$ принадлежит точка M; тогда графику функции $kf\left(\frac{x}{k}\right)$ должна принадлежать точка $M_1(x_1, y_1)$, если $x_1 = \frac{x}{k}$, а $y_1 = ky$. Таким образом, каждой точке M графика $f(x)$ соответствует точка M_1 графика функции $kf\left(\frac{x}{k}\right)$, гомотетичная точке M относительно начала координат, причем коэффициент гомотетии равен k.

На рис. 78 и 79 представлены графики функций $f(x)$ и $kf\left(\frac{x}{k}\right)$ при $k = \frac{1}{2}$ и $k = 2$. Если $k < 0$, то имеет место отрицательная гомотетия, или гомотетия с коэффициентом, равным $|k|$, и с последующей центральной симметрией относительно центра гомотетии (см. рис. 80).

Интересно заметить, что все параболы вида $y = kx^2$ гомотетичны относительно начала координат, потому что функцию kx^2 можно представить в виде $\frac{1}{k}(kx)^2$.

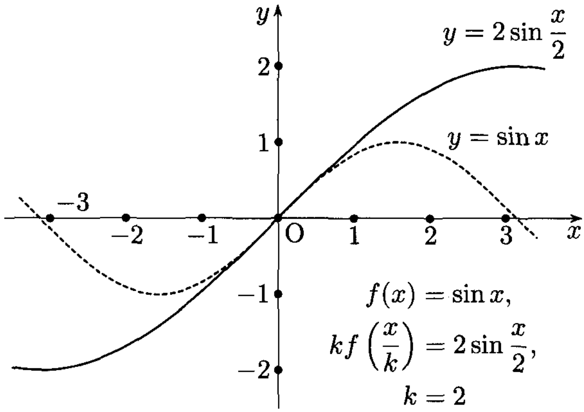


Рис. 79

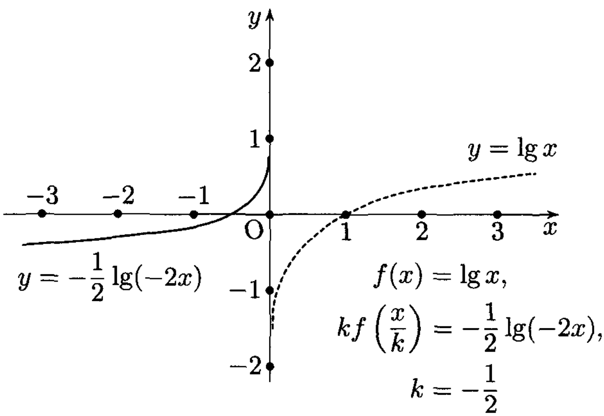


Рис. 80

Точно так же все равносторонние гиперболы $y = \frac{k}{x}$ гомотетичны с коэффициентом гомотетии $\sqrt{k}$ $(k > 0)$, потому что $\frac{x}{k} = \sqrt{k}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k}}x}$.

Из гомотетичности следует подобие; стало быть, все параболы подобны друг другу, и все равносторонние гиперболы также подобны*).

Приведем примеры гомотетичного преобразования графиков функций (см. рис. 79, 80).

*) Последнее заключение нельзя считать строго обоснованным предшествующими рассуждениями. Для строгого обоснования нужны сведения из § 17 (вращение).

По отношению к графикам уравнений мы приходим к следующему выводу: *график уравнения $f(kx, ky) = 0$ есть результат гомотетичного преобразования графика уравнения $f(x, y) = 0$ с центром в начале координат и коэффициентом гомотетии k.*

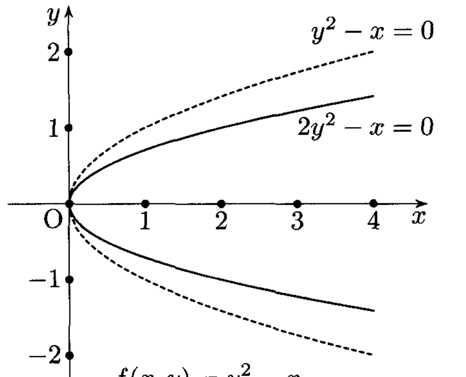


Рис. 81

Действительно, пусть $y = \varphi(x)$ — одна из функций, определяемых уравнением $f(x, y) = 0$; тогда $ky = \varphi(kx)$ — функция, определяемая уравнением $f(kx, ky) = 0$; но если $ky = \varphi(kx)$, то $y = \frac{1}{k}\varphi(kx)$, а это есть условие гомотетичности графиков $\varphi(x)$ и $\frac{1}{k}\varphi(kx)$ с коэффициентом гомотетии $\frac{1}{k}$.

На рис. 81 представлена гомотетия графика уравнения $y^2 - x = 0$ $\left(\frac{1}{k} = \frac{1}{2},\ k = 2\right)$.

Упражнения

Постройте графики функций.

40. $y = -\frac{1}{2}\arccos(-2x)$.

41. $y = 2^{\frac{x+2}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$.

Постройте график уравнения.

42. $2x^2 + 2y^2 = 1$.

§ 13. Равномерное сжатие к прямой, параллельной оси ординат. Графики функций $f(x)$ и $f(kx+b)$

Пусть на координатной плоскости задана прямая $x = a$, параллельная оси ординат.

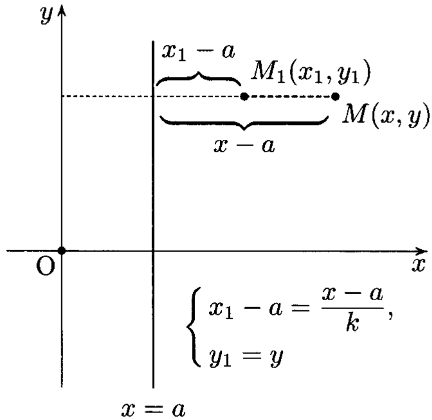


Рис. 82

Рассмотрим координаты точки $M(x, y)$ и координаты точки $M_1(x_1, y_1)$, в которую перейдет точка M, если подвергнуть координатную плоскость сжатию (или растяжению) с коэффициентом k $(k \neq 1)$*) к прямой $x = a$ (см. рис. 82). Отношение расстояний от точек M и M_1 до оси сжатия должно быть равно коэффициенту сжатия; ординаты точек M и M_1 равны. Мы приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{cases} x_1 - a = \dfrac{1}{k}(x - a), \\ y_1 = y, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x - a(1-k)}{k}, \\ y_1 = y. \end{cases}$$

При этом если $k > 1$, то имеет место сжатие к оси $x = a$, а при $0 < k < 1$ — растяжение от оси $x = a$.

В качестве упражнения предлагаем читателю убедиться в том, что указанные соотношения между x_1 и x не изменяются при различных положениях оси сжатия ($a > 0$, $a < 0$). Если сначала производится сжатие-растяжение относительно оси $x = a$, а затем симметрия относительно этой же оси, то коэффициент k надо считать отрицательным.

---

*)При $k = 1$ имеет место параллельный перенос.

Очевидно, справедливо и обратное утверждение, **а именно**: если координаты двух точек $M(x,y)$ и $M_1(x_1,y_1)$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x-a(1-k)}{k}, \\ y_1 = y, \end{cases}$$

то можно считать, что точка M_1 получена в результате сжатия-растяжения к оси $x=a$, при этом если $k>1$, то имеет место сжатие; если $0<k<1$ — растяжение, а при $k<0$ к преобразованию сжатия-растяжения с коэффициентом, равным $|k|$, присоединяется симметрия относительно оси $x=a$.

Пусть точка $M(x,y)$ принадлежит графику функции $f(x)$, тогда графику $f(kx+b)$ должна принадлежать точка M_1 с такой же ординатой и абсциссой x_1, если $f(kx_1+b)=f(x)$, т. е. если $kx_1+b=x$, или

$$x_1 = \frac{x-b}{k}. \tag{1}$$

Равенство (1) преобразуется к виду

$$x_1 = \frac{x - \frac{b}{1-k}(1-k)}{k}. \tag{2}$$

Сравнивая соотношение (2) с формулой

$$x_1 = \frac{x-a(1-k)}{k},$$

приходим к выводу, что в точку M_1 переходит точка M в результате преобразования сжатия-растяжения к оси $x=\dfrac{b}{1-k}$. Наше рассуждение применимо к любой точке графика функции $f(x)$, поэтому мы приходим к следующему выводу: *график функции $f(kx+b)$ есть результат сжатия-растяжения графика функции $f(x)$ к оси $x=\dfrac{b}{1-k}$ с коэффициентом сжатия-растяжения, равным k, причем при $k>1$ имеет место сжатие, при $0<k<1$ — растяжение, а при $k<0$ к преобразованию сжатия-растяжения присоединяется симметрия относительно оси $x=\dfrac{b}{1-k}$* (см. рис. 83).

Рассмотрим функцию $y=2x+1$: если считать, что $f(x)=x$, то функцию $2x+1$ можно представить как $f(kx+b)$, где $k=2$, $b=1$. Тогда построение графика такой функции можно осуществить, пользуясь сформулированным выше правилом, рассматривая ее график как результат сжатия в 2 раза графика $y=x$ к оси $x=\dfrac{b}{1-k}$, т. е. $x=-1$ (см. рис. 84).

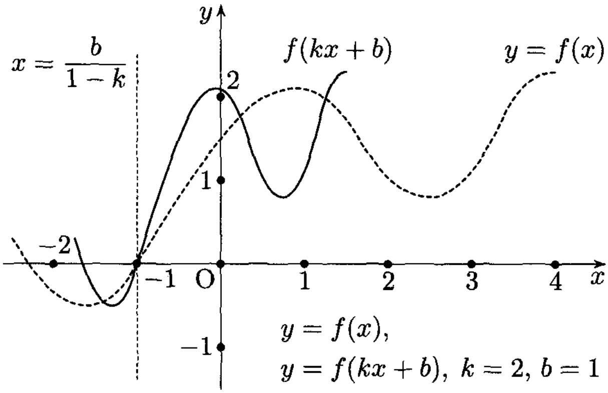


Рис. 83

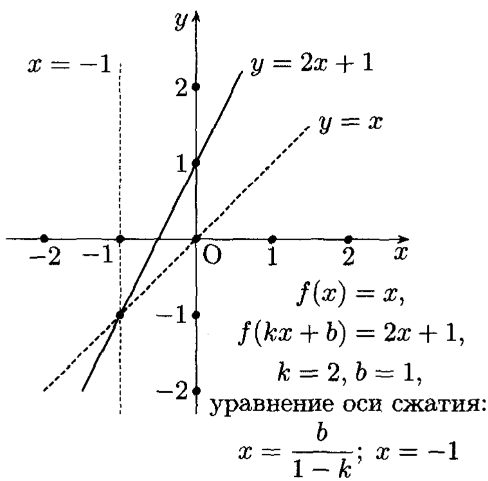


Рис. 84

При построении графиков функций $f(kx+b)$ сначала строится график функции $f(x)$, затем проводится ось сжатия (прямая $x = \frac{b}{1-k}$). Точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью сжатия остаются неподвижными. Затем для отдельных точек графика функции $f(x)$ строятся соответствующие им точки при заданном коэффициенте сжатия-растяжения.

Приводимые ниже примеры построения графиков (см. рис. 85, 86, 87) следует внимательно рассмотреть с точки зрения применения правила для построения графиков функций $f(kx+b)$.

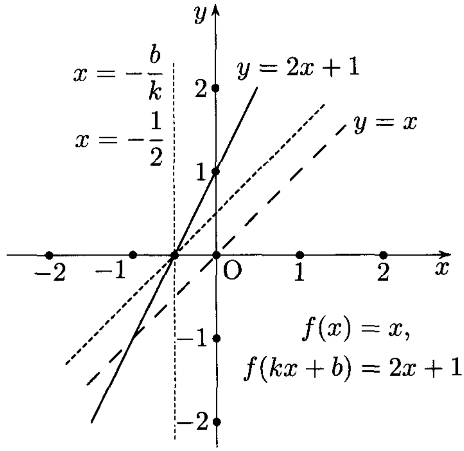
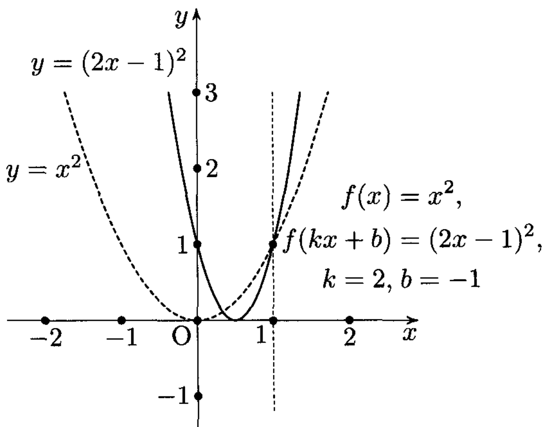


Рис. 85



Уравнение оси сжатия: $x = \dfrac{b}{1-k}$; $x = 1$

Рис. 86

Переходя к уравнениям вида $f(kx + b, y) = 0$, получаем следующее правило для построения графиков таких уравнений, если график уравнения $f(x, y) = 0$ задан.

График уравнения $f(kx + b, y) = 0$ есть результат сжатия-растяжения к оси $x = \dfrac{b}{1-k}$ графика уравнения $f(x, y) = 0$ с коэффициентом сжатия-растяжения, равным k. При этом если $k > 1$, *то имеет место сжатие в k раз, если $0 < k < 1$ — растяжение в k раз. При $k < 0$ к преобразованию сжатия присоединяется симметрия относительно оси сжатия* $\left(x = \dfrac{b}{1-k}\right)$.

На рис. 88 приведен пример такого преобразования уравнения $x^2 + y^2 = 4$.

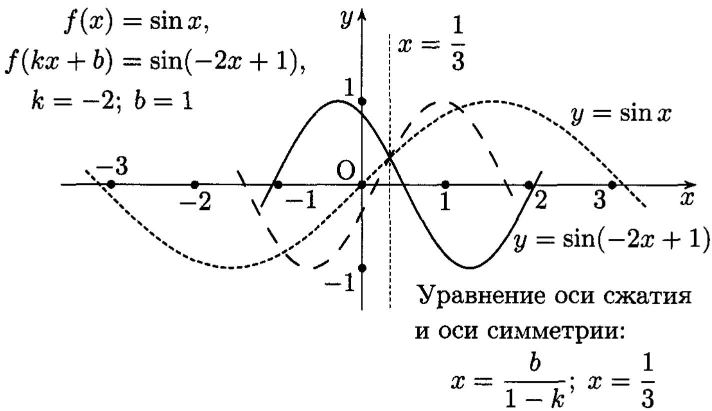


Рис. 87

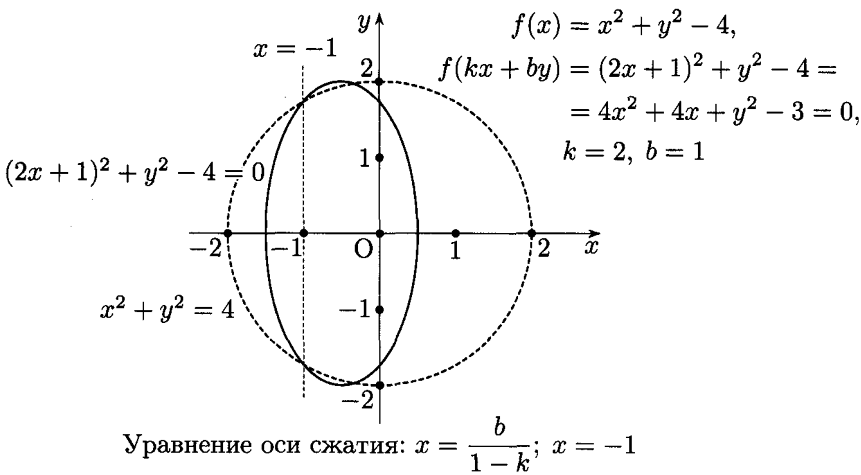


Рис. 88

График функции $f(kx + b)$ можно рассматривать и с другой точки зрения. Так как $f(kx + b) = f\left[k\left(x + \dfrac{b}{k}\right)\right]$, график $-f(kx + b)$ можно считать результатом параллельного переноса графика функции $f(x)$ вдоль оси абсцисс на отрезок $\left|\frac{b}{k}\right|$ (соответственно вправо или влево в зависимости от знака $\frac{b}{k}$) и последующего сжатия-растяжения с коэффициентом k к оси $x = -\frac{b}{k}$.

Эта вторая точка зрения менее удобна для построения графиков, так как требует двух преобразований (параллельного переноса и осевого сжатия). На рис. 85 показано построение графика функции $y = 2x + 1$ таким способом.

Упражнения

Постройте двумя способами графики следующих функций.

43. $y = \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{1}{\frac{x}{2} - 1}$.

44. $y = \arccos(2x + 1)$.

Постройте график уравнения.

45. $y^2 - 3x + 1 = 0$.

§ 14. Равномерное сжатие к прямой, параллельной оси абсцисс. Графики функций $f(x)$ и $mf(x) + p$

Пусть на координатной плоскости задана прямая $y = a$ и выполнено преобразование сжатия-растяжения плоскости к оси $y = a$ с коэффициентом k. Тогда произвольная точка $M(x, y)$ плоскости перейдет в точку $M_1(x_1, y_1)$ (см. рис. 89), причем отношение расстояний от точек M_1 и M до оси сжатия должно быть равно коэффициенту сжатия-растяжения. Таким образом, координаты точек M_1 и M связаны соотношениями

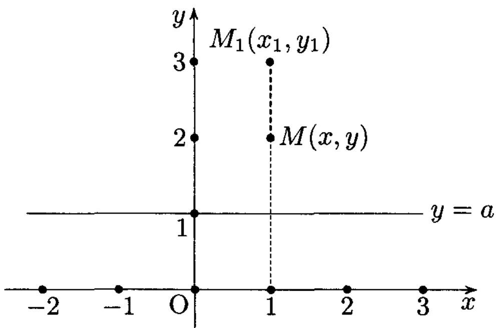
$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 - a = k(y - a), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = ky + a(1 - k), \end{cases}$$

где k — коэффициент сжатия-растяжения. При этом если $k > 1$, то имеет место растяжение в k раз от оси $y = a$, если же $0 < k < 1$, то имеет место сжатие в $\frac{1}{k}$ раз к оси $y = a$. Если $k < 0$, то к сжатию-растяжению с коэффициентом $|k|$ присоединяется симметрия относительно оси $y = a$.

Справедливо и обратное утверждение, а именно: если координаты двух точек $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = ky + a(1 - k), \end{cases}$$

то можно считать, что точка M_1 получена как точка, соответствующая точке M, в результате сжатия-растяжения координатной плоскости к оси $y = a$. При этом если $k > 1$, то имеет место растяжение в k раз, если $0 < k < 1$, то сжатие в $\frac{1}{k}$ раз.



$$\begin{cases} x_1 = x, \\ \dfrac{y_1 - a}{y - a} = m \end{cases}$$

Рис. 89

Если точка $M(x, y)$ принадлежит графику функции $f(x)$, то, очевидно, точка $M_1(x_1, y_1)$ должна принадлежать графику функции $mf(x) + p$ при $x_1 = x$ и $y_1 = my + p$. Но $y_1 = my + p$ можно представить в виде*)

$$y_1 = my + \frac{p}{1-m}(1 - m).$$

Теперь ясно, что в точку M_1 должна перейти точка M в результате преобразования сжатия-растяжения координатной плоскости к оси $y = \frac{p}{1-m}$, причем если $m > 1$, то имеет место растяжение от этой оси в m раз, а если $0 < m < 1$, то сжатие в $\frac{1}{m}$ раз к этой же оси.

Таким образом, *график функции $mf(x) + p$ есть результат преобразования сжатия-растяжения графика функции $f(x)$ к оси $y = \frac{p}{1-m}$, причем если $m > 1$, то имеет место растяжение, если $0 < m < 1$ — сжатие. Если же $m < 0$, то к преобразованию сжатия-растяжения с коэффициентом, равным $|m|$, присоединяется симметрия относительно оси $y = \frac{p}{1-m}$.*

На рис. 90 приводится пример построения графика функции $mf(x) + p$.

*) Мы считаем, что $m \neq 1$. При $m = 1$ получим параллельный перенос, рассмотренный в § 7.

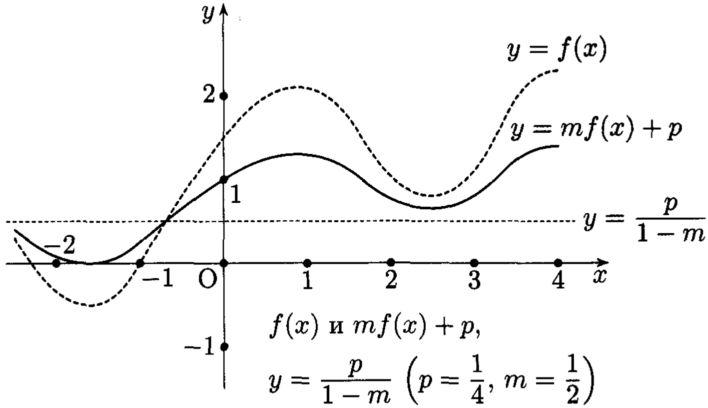


Рис. 90

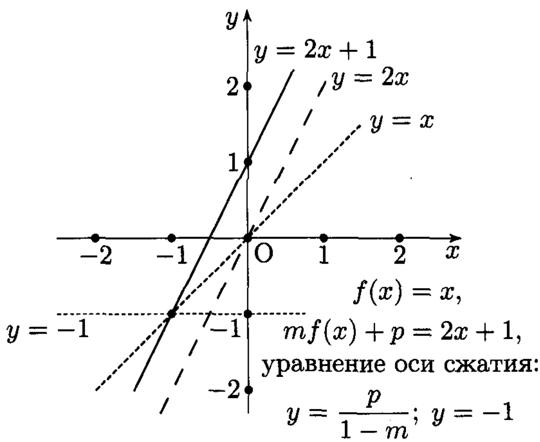
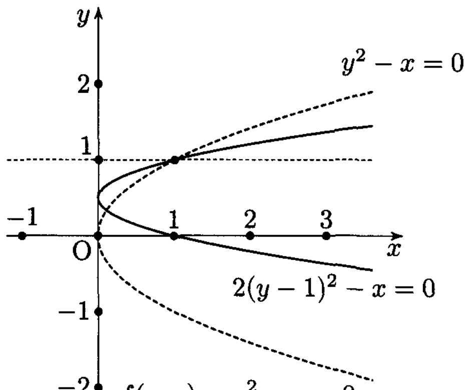


Рис. 91

Заметим, что возможна другая точка зрения на график функции $mf(x) + p$. Такой график можно рассматривать как результат сжатия-растяжения графика функции $f(x)$ к оси абсцисс и последующего параллельного переноса вдоль оси ординат.

В практике построения графиков предпочтительней первая точка зрения, требующая всего лишь одного преобразования (разумеется, после предварительного установления оси сжатия-растяжения). Для иллюстрации этих двух способов приводится рис. 91, на котором уже встречавшийся график функции $y = 2x + 1$ снова строится двумя способами.



$f(x, y) = y^2 - x = 0,$

$f(x, my + p) = (2y - 1)^2 - x,\ p = -1,\ m = 2,$

уравнение оси сжатия: $y = \dfrac{p}{1-m}$; $y = 1$

Рис. 92

Рассмотрим теперь вопрос о графике уравнения вида $f(x, my + p) = 0$. Если уравнением $f(x, y) = 0$ определяется функция $y = \varphi(x)$, то уравнением $f(x, my + p) = 0$ определяется функция $my + p = \varphi(x)$, т. е.

$$y = \frac{1}{m}\varphi(x) - \frac{p}{m}.$$

График такой функции можно рассматривать как результат преобразования сжатия-растяжения графика функции $\varphi(x)$ к оси $y = \dfrac{-\frac{p}{m}}{1 - \frac{1}{m}} = \dfrac{p}{1-m}$ с коэффициентом сжатия-растяжения, равным $\dfrac{1}{m}$.

Так как совокупность графиков всех функций $\varphi(x)$, определяемых уравнением $f(x, y) = 0$, служит графиком самого уравнения $f(x, y) = 0$, мы приходим к следующему выводу: *график уравнения $f(x, my + p) = 0$ есть результат сжатия-растяжения графика уравнения $f(x, y) = 0$ к оси $y = \dfrac{p}{1-m}$ с коэффициентом, равным $\dfrac{1}{m}$, причем если $m > 1$, то имеет место сжатие, а если $0 < m < 1$, то растяжение, а при $m < 0$ к преобразованию сжатия-растяжения с коэффициентом, равным $\left|\dfrac{1}{m}\right|$, присоединяется симметрия относительно оси $y = \dfrac{p}{1-m}$.*

Приведем теперь пример построения графика уравнения вида $f(x, my + p) = 0$. В качестве уравнения $f(x, y) = 0$ рассматривается уравнение $y^2 - x = 0$. Новое уравнение: $(2y - 1)^2 - x = 0$ (см. рис. 92).

Приведем примеры построения графиков функций вида $mf(x)+p$ (см. рис. 93, 94).

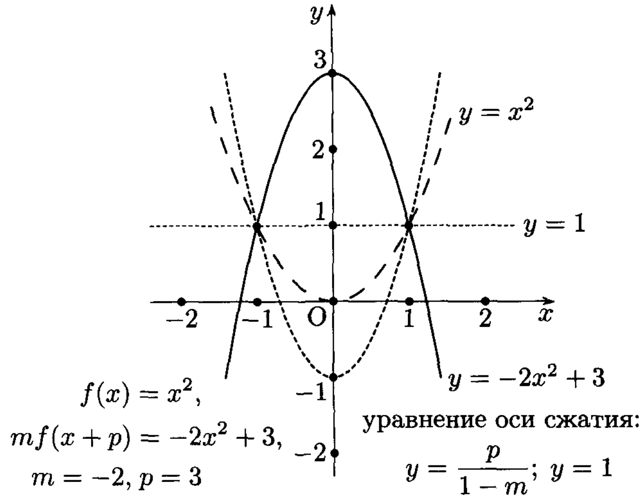


Рис. 93

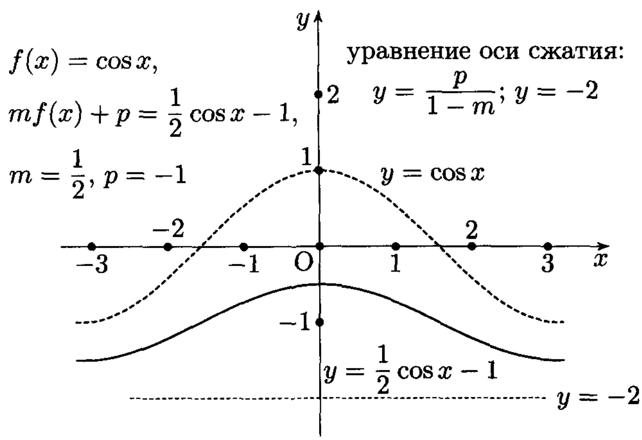


Рис. 94

Упражнения

Постройте графики функций (двумя способами).

46. $y = \dfrac{1}{2x} - 1.$

47. $y = 2\arcsin x - 1$.

Постройте график уравнения.

48. $(2y+1)^2 + x^2 = 4$.

§ 15. Линейные преобразования аргумента и функции. Графики функций $f(x)$ и $mf(kx+b)+p$

В § 13 и 14 были рассмотрены отдельно линейные преобразования аргумента ($f(kx+b)$) и линейные преобразования функции ($mf(x)+p$). Оказалось, что графики соответствующих функций представляют собой результаты сжатия-растяжения графиков функции $f(x)$ к прямым, параллельным осям координат.

Таким образом, мы приходим к следующему выводу: *график функции $mf(kx+b)+p$ $(m \neq 1,\ k \neq 1)$ есть результат сжатия-растяжения графика функции $f(x)$ к оси $x = \dfrac{b}{1-k}$ и последующего сжатия-растяжения графика функции $f(kx+b)$ к оси $y = \dfrac{p}{1-m}$.*

При другом порядке преобразований сначала строится график функции $\varphi(x) = mf(x)+p$, т. е. производится сжатие-растяжение графика функции $f(x)$ к оси $y = \dfrac{p}{1-m}$, затем строится график функции $\varphi(kx+b)$, т. е. производится сжатие-растяжение графика $\varphi(x)$ к оси $x = \dfrac{b}{1-k}$. Можно объединить оба построения, если каждую точку графика функции $f(x)$ подвергнуть соответствующим перемещениям относительно двух заранее построенных осей сжатия-растяжения $\left(x = \dfrac{b}{1-k}\right.$ и $\left.y = \dfrac{p}{1-m}\right)$. Пример такого построения приведен на рис. 95.

Рассмотрим функцию $y = ax^2+bx+c$; выполнив преобразование, известное под названием «выделение полного квадрата», получим

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Если считать, что $f(x) = x^2$, то рассматриваемая функция может быть представлена в виде $mf(kx+b)+p$, где $m = a$, $k = 1$, $b = \dfrac{b}{2a}$ и $p = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$. График такой функции есть результат параллельного переноса графика функции $y = x^2$ вдоль оси абсцисс на отрезок, равный $\left|\dfrac{b}{2a}\right|$, и сжатия-растяжения полученного графика по отношению к оси $y = \dfrac{4ac-b^2}{4a(1-a)}$.

В учебной литературе чаще встречается другая точка зрения на график функции ax^2+bx+c; он рассматривается как результат

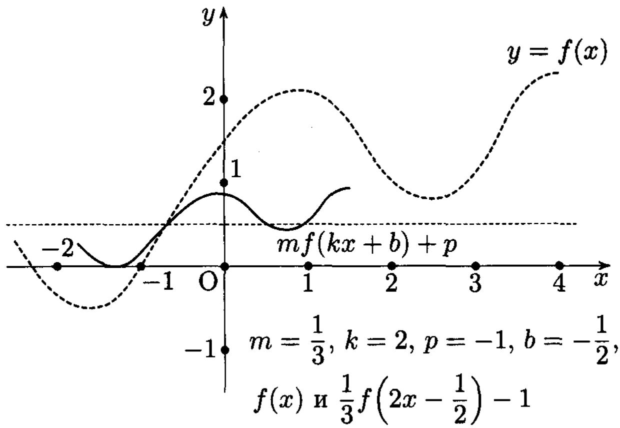


Рис. 95

параллельного переноса графика функции $y = x^2$ на отрезок $\left|\frac{b}{2a}\right|$, затем сжатия-растяжения в $|a|$ раз к оси $x = -\frac{b}{2a}$ и, наконец, параллельного переноса (вверх или вниз) на отрезок, равный $\left|\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right|$.

Оба способа построения иллюстрируются на рис. 96 и 97.

В свете изложенной ранее теории представляется возможным построить график функции $ax^2 + bx + c$ в результате только одного преобразования графика функции x^2 (или $-x^2$). Дело в том, что функцию $ax^2 + bx + c$ можно представить в виде

$$\frac{1}{a}\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Таким образом, $ax^2 + bx + c = mf(kx + b_1) + p$, где $m = \frac{1}{a}$, $k = a$, $b_1 = \frac{b}{2}$ и $p = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

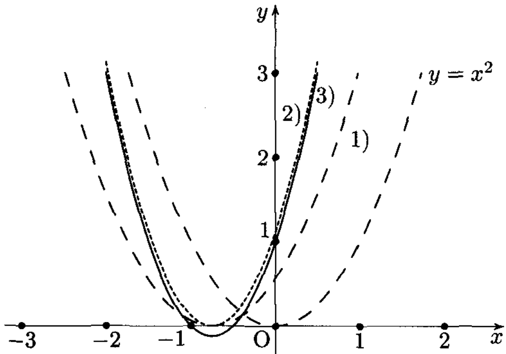
В § 12 было установлено, что сжатия*) с одним и тем же коэффициентом к двум взаимно перпендикулярным осям есть гомотетия с тем же коэффициентом и центром в точке пересечения осей сжатия, поэтому графики функций $f(x)$ и $kf\left(\frac{x}{k}\right)$ гомотетичны.

Оказывается, графики функций x^2 и $ax^2 + bx + c$ также гомотетичны при $a > 0$, потому что

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

---

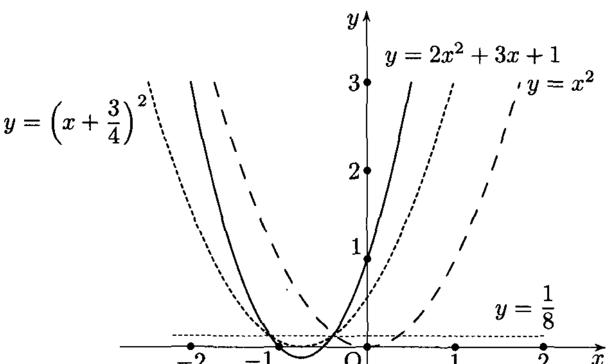
*) Для сокращения речи вместо слов «сжатие-растяжение» мы будем говорить только одно слово «сжатие» (имея в виду и то и другое).



$f(x) = x^2$,
$mf(x+b)+p = 2x^2+$
$+3x+1 = 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$

1) $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$,
2) $2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$,
3) $2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} =$
$= 2x^2+3x+1$

Рис. 96



$y = 2x^2+3x+1 =$
$= 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$

$f(x) = x^2$,
$mf(x+b)+p =$
$= 2\left(x+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{8}$,
$m = 2,\ b = \frac{3}{4}, p = -\frac{1}{8}$,

уравнение оси сжатия: $y = \frac{p}{1-m}$; $y = \frac{1}{8}$

Рис. 97

Коэффициент гомотетии равен $\frac{1}{a}$, а центр гомотетии лежит в точке пересечения осей сжатия, уравнения которых

$$x = \frac{p}{1-m}, \quad y = \frac{b}{1-k} \quad (\text{см. § 13 и 14}).$$

Значит, центр гомотетии графиков функций $y = x^2$ и $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ лежит в точке

$$O\left(\frac{4ac - b^2}{4(1-a)}, \frac{b}{2(1-a)}\right).$$

Например, график функции $2x^2 + 3x + 1$ гомотетичен графику функции x^2. Коэффициент гомотетии равен $\frac{1}{2}$, центр гомотетии лежит в точке $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ (см. рис. 98). При $a < 0$ гомотетичны графики функций $y = -x^2$ и $y = ax^2 + bx + c$.

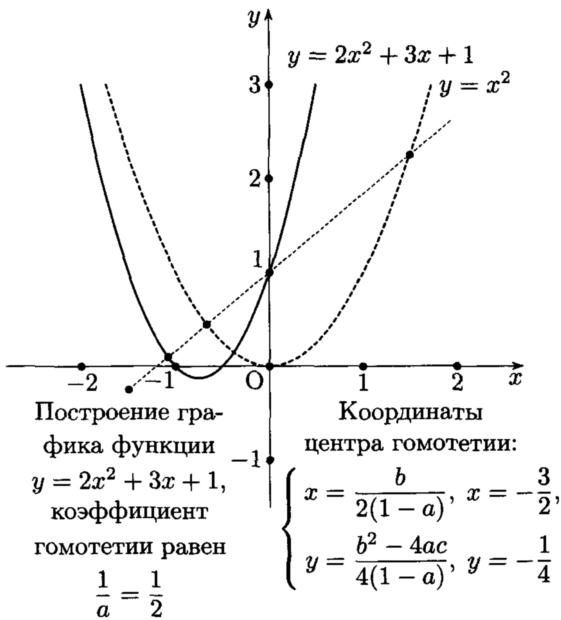


Рис. 98

Стоит, пожалуй, заметить, что графики двух функций вида $y = x^n$ и $y = ax^n$ также гомотетичны, потому что $ax^n = \frac{1}{\sqrt[n-1]{a}} \cdot \left(\sqrt[n-1]{a} \cdot x\right)^n$; в этом случае коэффициент гомотетии равен*) $\frac{1}{\sqrt[n-1]{a}}$.

*) Мы предполагаем здесь, что $a > 0$, $a \neq 1$; при $a < 0$ в зависимости от четности n имеет место либо гомотетия, либо гомотетия и осевая симметрия.

Можно также установить гомотетичность графиков показательных функций вида $ma^{kx+b}+p$ и a^x и логарифмических функций вида $m\log_a(kx+b)+p$ и $\log_a x$.

В дальнейшем нам понадобится факт гомотетии графиков функций $\frac{1}{x}$ и $\frac{k}{x}$. Действительно, если $k>0$, то

$$\frac{k}{x}=\sqrt{k}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k}}x},$$

т. е. функция имеет вид $mf\left(\frac{x}{m}\right)$, где $f(x)=\frac{1}{x}$. Следовательно, графики функций $\frac{k}{x}$ и $\frac{1}{x}$ гомотетичны, центр гомотетии лежит в начале координат, а коэффициент гомотетии равен $\sqrt{k}$ $(k>0)$. Если $k<0$, то $k=-k'$, где $k'>0$ и

$$\frac{k}{x}=-\frac{k'}{x}=-\sqrt{k'}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k'}}x};$$

в этом случае имеет место гомотетия с графиком функции $y=-\frac{1}{x}$.

Теперь рассмотрим график дробно-линейной функции вида $y=\frac{ax+b}{cx+d}$. Очевидно, следует считать, что $a\neq 0$ и $c\neq 0$. Не нарушая общности рассуждений, можно представить нашу функцию в форме

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{\alpha x+\beta}{x+\gamma},$$

где

$$\alpha=\frac{a}{c},\quad \beta=\frac{b}{c}\quad\text{и}\quad\gamma=\frac{d}{c}. \tag{1}$$

Такую форму дробно-линейной функции мы назовем приведенной и в дальнейшем будем рассматривать приведенную форму. Преобразованием

$$\frac{\alpha x+\beta}{x+\gamma}=\frac{\alpha(x+\gamma)+\beta-\alpha\gamma}{x+\gamma}=(\beta-\alpha\gamma)\cdot\frac{1}{x+\gamma}+\alpha$$

дробно-линейная функция приводится к виду

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad m=\beta-\alpha\gamma,\quad k=1,\quad b=\gamma,\quad p=\alpha.$$

Как было установлено ранее, график такой функции есть результат параллельного переноса графика функции $\frac{1}{x}$ (гиперболы) вдоль оси абсцисс (на отрезок γ) и сжатия к прямой, параллельной оси абсцисс. Уравнение оси сжатия: $y=\frac{\alpha}{1-(\beta-\alpha\gamma)}$, коэффициент сжатия равен $\beta-\alpha\gamma$.

Такой график часто рассматривается как результат параллельного переноса графика функции $\frac{1}{x}$ вдоль оси абсцисс на отрезок γ, сжатия к оси абсцисс с коэффициентом $\beta-\alpha\gamma$ и, наконец, параллельного переноса вдоль оси ординат на отрезок α.

Однако, как мы покажем далее, можно обойтись только одним преобразованием. Предварительно сделаем несколько замечаний.

1. Если $\beta-\alpha\gamma=0$, то $y=\alpha$, т. е. график дробно-линейной функции «вырождается» в прямую, параллельную оси абсцисс. В дальнейшем будем считать, что $\beta-\alpha\gamma\neq 0$, т. е. $ad-bc\neq 0$ (см. формулы (1)).

2. Если $\beta-\alpha\gamma=1$, то наша функция принимает вид

$$y=\frac{1}{x+\gamma}+\alpha.$$

График такой функции есть результат двух параллельных переносов графика функции*) $\frac{1}{x}$.

Этот случай считаем рассмотренным и в дальнейшем будем считать, что

$$\beta-\alpha\gamma\neq 1, \quad \text{или} \quad \frac{bc-ad}{c^2}\neq 1.$$

3. Если $\beta-\alpha\gamma=-1$, то функция имеет вид

$$-\frac{1}{x+\gamma}+\alpha=-\left(\frac{1}{x+\gamma}-\alpha\right).$$

Ее график может быть получен как результат двух параллельных переносов и последующей симметрии относительно оси абсцисс. Этот случай также исключен из дальнейшего рассмотрения, т. е. будем считать, что

$$\beta-\alpha\gamma\neq -1, \quad \text{или} \quad \frac{bc-ad}{c^2}\neq -1.$$

Теперь нетрудно показать, что график функции

$$y=(\beta-\alpha\gamma)\cdot\frac{1}{x+\gamma}+\alpha$$

при условии $\beta-\alpha\gamma>0$ и $\beta-\alpha\gamma\neq 1$ есть результат гомотетии графика функции $y=\frac{1}{x}$. Представив нашу функцию в виде

$$y=\sqrt{\beta-\alpha\gamma}\,\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{\beta-\alpha\gamma}}+\frac{\gamma}{\sqrt{\beta-\alpha\gamma}}}+\alpha,$$

*) Два параллельных переноса вдоль координатных осей на отрезок a вдоль оси абсцисс и на отрезок b вдоль оси ординат можно заменить одним параллельным переносом на вектор с началом в точке $(0,0)$ и концом в точке (a,b).

немедленно убеждаемся, что график такой функции гомотетичен графику функции $y = \frac{1}{x}$, коэффициент гомотетии равен $\sqrt{\beta - \alpha\gamma}$; центр гомотетии лежит в точке $\left(\frac{b}{1-k}, \frac{p}{1-m}\right)$, т. е. в точке

$$\left(\frac{\frac{\gamma}{\sqrt{\beta-\alpha\gamma}}}{1-\frac{1}{\sqrt{\beta-\alpha\gamma}}}, \frac{\alpha}{1-\sqrt{\beta-\alpha\gamma}}\right), \quad \text{или} \quad \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\beta-\alpha\gamma}-1}, \frac{\alpha}{1-\sqrt{\beta-\alpha\gamma}}\right).$$

Если выразить α, β и γ через a, b, c и d (формулы (1)), то получим координаты центра гомотетии в виде

$$\begin{cases} x = \dfrac{d}{\sqrt{bc-ad}-c}, \\ y = \dfrac{a}{c-\sqrt{bc-ad}}. \end{cases}$$

Коэффициент гомотетии равен $\frac{\sqrt{bc-ad}}{c}$.

Нам осталось рассмотреть случай $\beta - \alpha\gamma < 0$. Пусть $\beta - \alpha\gamma = -\sigma$, $\sigma > 0$. Рассматриваемая функция может быть записана в виде

$$y = -\sigma\frac{1}{x+\gamma} + \alpha = -\left(\frac{\sigma}{x+\gamma} - \alpha\right).$$

График этой функции есть результат гомотетии графика функции $y = \frac{1}{x}$ и последующей симметрии относительно оси абсцисс*).

Итак, вопрос о графике дробно-линейной функции решен исчерпывающим образом, и мы можем составить сводку полученных результатов.

Графиком дробно-линейной функции вида

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

является в общем случае гипербола ($bc - ad \neq 0$).

В частных случаях:

1) при $bc - ad = 0$ графиком служит прямая $y = \text{const}$;

2) при $bc - ad > 0$ и $\frac{bc-ad}{c^2} \neq 1$ графиком является гипербола, гомотетичная гиперболе $y = \frac{1}{x}$;

*) Этот график можно также рассматривать как гомотетию графика функции $y = -\frac{1}{x}$.

3) при $\dfrac{bc-ad}{c^2}=1$ графиком служит гипербола, полученная в результате параллельного переноса гиперболы $y=\dfrac{1}{x}$;

4) при $bc-ad<0$ и $\dfrac{bc-ad}{c^2}\neq 1$ график получается в результате симметрии относительно оси абсцисс гиперболы, гомотетичной гиперболе $y=\dfrac{1}{x}$, или гомотетии графика функции $y=-\dfrac{1}{x}$;

5) при $\dfrac{bc-ad}{c^2}=-1$ графиком является гипербола, симметричная относительно оси абсцисс параллельно перенесенной гиперболе $y=\dfrac{1}{x}$.

Рассмотрим следующий пример: пусть $y=\dfrac{3x+2}{2x+1}$; найдем для этой функции выражение $\dfrac{bc-ad}{c^2}$; оно равно $\dfrac{4-3}{4}=\dfrac{1}{4}$. Значит, график функции $y=\dfrac{3x+2}{2x+1}$ гомотетичен графику $y=\dfrac{1}{x}$. Коэффициент гомотетии равен $\dfrac{\sqrt{bc-ad}}{c}=\dfrac{1}{2}$, центр гомотетии лежит в точке $O\left(\dfrac{d}{\sqrt{bc-ad}-c}, \dfrac{a}{c-\sqrt{bc-ad}}\right)$, т. е. $O'(-1,3)$. Соответствующее построение выполнено на рис. 99.

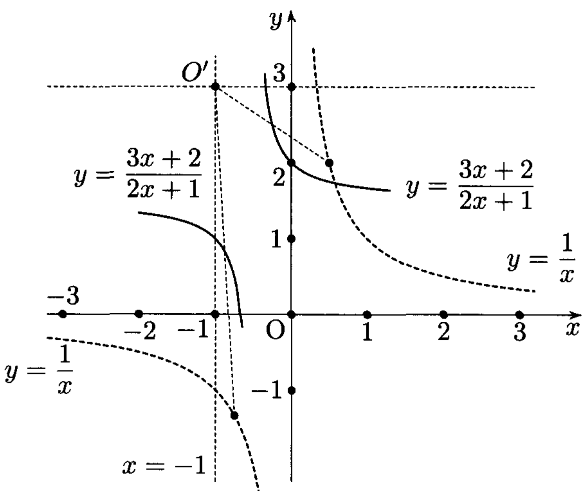


Рис. 99

Рассмотрим график функции $y=x+\dfrac{1}{x}$. Он может быть построен путем «сложения» графиков функций $y=x$ и $y=\dfrac{1}{x}$ (см. рис. 100). По графику видно, что наша функция имеет локальные экстремумы:

$y_{\min} = 2$ при $x = 1$ и $y_{\max} = -2$ при $x = -1$ (хорошо известная теорема о сумме взаимно обратных чисел). Ось ординат и биссектриса координатных углов I и III четверти служат асимптотами графика.

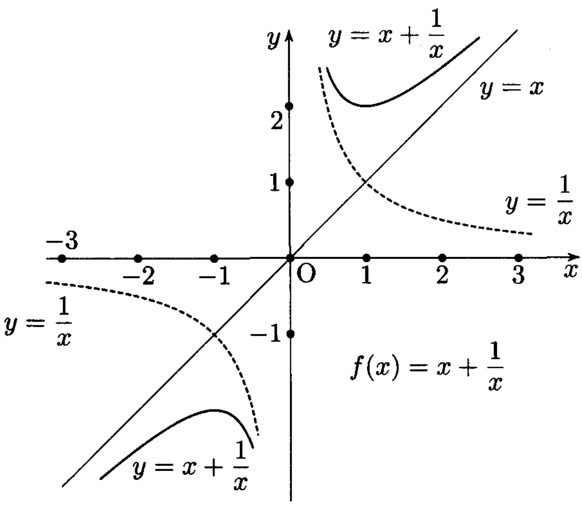


Рис. 100

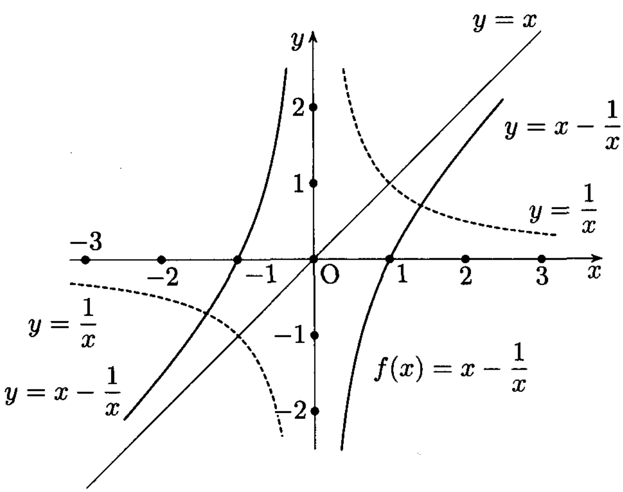


Рис. 101

График функции $y = x - \frac{1}{x}$ строится путем «вычитания» графиков функций $y = x$ и $y = \frac{1}{x}$ (см. рис. 101). Функция $y = x - \frac{1}{x}$ не имеет экстремумов. Ее график имеет те же асимптоты, что и график функции $y = x + \frac{1}{x}$. Заметим также, что график функции $y = -\frac{1}{x} - x$ можно рассматривать как график функции $-f(x)$, где $f(x) = x + \frac{1}{x}$, а график функции $y = \frac{1}{x} - x$ — как график функции $-f(x)$, где $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Все эти графики могут применяться для построения графиков дробных квадратично-линейных функций вида

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}. \tag{A}$$

Мы покажем, что графики функций вида (A) могут быть построены как графики функций $y = mf(kx + b) + p$, где $f(x)$ — одна из четырех рассмотренных функций вида $\pm\left(x \pm \frac{1}{x}\right)$. Сначала убедимся, что функция $\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ $(a \neq 0,\ d \neq 0)$ представима в виде $\alpha x + \beta + \frac{\delta}{\gamma x + \varepsilon}$. Для этого надо установить существование и единственность решения системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha\gamma = a, \\ \alpha\varepsilon + \beta\gamma = b, \\ \beta\varepsilon + \delta = c, \\ \gamma = d, \\ \varepsilon = e. \end{cases}$$

Это нетрудно сделать, и мы получим следующее решение:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{a}{d}, \\ \beta = \dfrac{bd - ae}{d^2}, \\ \gamma = d, \\ \delta = \dfrac{cd^2 + ae^2 - bde}{d^2}, \\ \varepsilon = e. \end{cases} \tag{B}$$

Итак, с помощью соотношений (B) мы получаем тождество

$$\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \alpha x + \beta + \frac{\delta}{\gamma x + \varepsilon}.$$

Теперь покажем, что функция $\alpha x + \beta + \frac{\delta}{\gamma x + \varepsilon}$ преобразуется к виду $mf(kx + b) + p$, где $f(x)$ — одна из четырех функций $\pm\left(x \pm \frac{1}{x}\right)$, при условии $\delta \neq 0$.

Случай $\delta = 0$, т. е. $cd^2 + ae^2 - ebd = 0$, мы рассмотрим тотчас же, чтобы не возвращаться к нему в дальнейшем.

Как нетрудно заметить, при $\delta = 0$ функция $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ преобразуется в виду $\alpha x + \beta$, т. е. в этом случае ее графиком служит прямая.

Пусть $\delta \neq 0$. Введем параметры $\mu = \dfrac{\gamma}{\delta}$ и $\lambda = \dfrac{\varepsilon}{\delta}$; тогда

$$\alpha x + \beta + \frac{\delta}{\gamma x + \varepsilon} = \alpha x + \beta + \frac{1}{\mu x + \lambda}.$$

Если $\delta \geqslant 0$ и $\mu > 0$, то

$$\alpha x + \beta + \frac{1}{\mu x + \lambda} - \\ - \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}}\left[\left(\sqrt{\alpha\mu}\cdot x + \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}}\lambda\right) + \frac{1}{\sqrt{\alpha\mu}\cdot x + \sqrt{\dfrac{\alpha}{\mu}}\lambda}\right] + \beta - \frac{\alpha\lambda}{\mu}, \qquad \text{(C)}$$

в чем легко убедиться, выполнив выкладки в правой части тождества (C). Это тождество означает, что функция (A) приведена к виду

$$mf(kx+b)+p, \quad \text{где} \quad f(x) = x + \frac{1}{x},$$

причем

$$m = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}}, \quad k = \sqrt{\alpha\mu}, \quad b = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}}\cdot\lambda, \quad p = \beta - \frac{\alpha\lambda}{\mu}. \qquad \text{(D)}$$

Таким образом, графиком функции $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ при $\alpha > 0$ и $\mu > 0$ является результат сжатия графика функции $y = x + \dfrac{1}{x}$ к прямым $x = \dfrac{b}{1-k}$, $y = \dfrac{p}{1-m}$ с коэффициентами k и m. В случае $km = 1$, т. е. $\alpha = 1$ или $a = d$, имеет место гомотетия.

Если $\alpha < 0$ и $\mu < 0$, то можно положить $\alpha = -\alpha'$, $\alpha' > 0$ и $\mu = -\mu'$, $\mu' > 0$. Тогда

$$\alpha x + \beta + \frac{1}{\mu x + \lambda} = -\left(\alpha' x - \beta + \frac{1}{\mu' x - \lambda}\right)$$

и преобразование (C) применимо к выражению $\alpha' x - \beta + \dfrac{1}{\mu' x - \lambda}$. В этом случае функция $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ снова приводится к виду $mf(kx+b)+p$, но $f(x) = -\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

Если $\alpha > 0$ и $\mu < 0$, то с помощью аналогичных рассуждений убедимся, что $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

Если $\alpha < 0$ и $\mu > 0$, то $f(x) = -\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$.

Этими четырьмя случаями и случаем $\delta = 0$, рассмотренным ранее, исчерпываются разновидности графика функции

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}.$$

Рассмотрим пример построения графика функции

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{3x + 2}.$$

В этом примере $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 3$, $e = 2$. По формулам (В) найдем $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = -\frac{1}{9}$, $\gamma = 3$, $\sigma = -\frac{7}{9}$, $\varepsilon = 2$. Теперь вычислим μ и λ. Получим $\mu = -\frac{27}{7}$, $\lambda = \frac{18}{7}$. Так как $\alpha > 0$, $\mu < 0$, имеем $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Далее, найдем

$$m = \frac{1}{9}\sqrt{14}, \quad k = \frac{3}{7}\sqrt{14}, \quad b = \frac{2}{7}\sqrt{14} \quad \text{и} \quad p = -\frac{5}{9}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{2x^2 + x - 1}{3x + 2} = = \frac{1}{9}\sqrt{14}\left(\frac{3}{7}\sqrt{14} + \frac{2}{7}\sqrt{14} - \frac{1}{\frac{3}{7}\sqrt{14}x + \frac{2}{7}\sqrt{14}}\right) - \frac{5}{9}.$$

Для построения графика функции $y = \frac{2x^2 + x - 1}{3x + 2}$ надо график функции $y = x - \frac{1}{x}$ подвергнуть сжатиям к прямым $x = \frac{b}{1 - k}$ и $y = \frac{p}{1 - m}$ с коэффициентами $k = \frac{3}{7}\sqrt{14} \approx 1{,}6$ и $m = \frac{1}{9}\sqrt{14} \approx 0{,}4$.

Такое построение осуществлено на рис. 102. Сначала строятся график функции $y = x - \frac{1}{x}$ и оси сжатия $x = -1{,}8$, $y = -1$. Затем график функции $y = x - \frac{1}{x}$ (изображенный прерывистой штриховой кривой) подвергается сжатию к оси $x = -1{,}8$ с коэффициентом 1,6 (полученные кривые изображены пунктиром) и, наконец, эти кривые сжимаются к оси $y = -1$ с коэффициентом сжатия 0,4. Окончательные кривые изображены жирной сплошной линией.

Читателю следует иметь в виду, что описанный здесь способ построения графика функции $y = \frac{2x^2 + x - 1}{3x + 2}$ не является наиболее рациональным. Даже построение этого графика «по точкам» оказалось бы более простым. Еще эффективнее построение, основанное на анализе функции $\frac{2x^2 + x - 1}{3x + 2}$. Однако и то и другое выходит за рамки настоящей книги, посвященной геометрическим преобразованиям графиков функций. Именно с этой точки зрения мы рассматриваем вопросы построения графиков функций. Такая точка зрения, как, вероятно, заметил

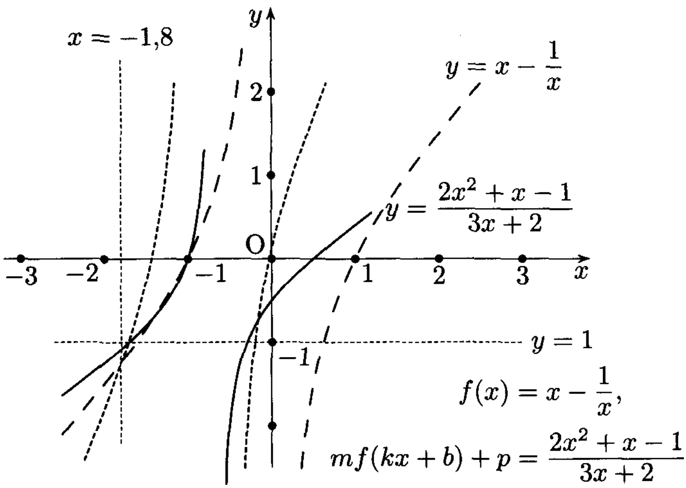


Рис. 102

читатель, во многих случаях оказывается весьма полезной при построении графиков функций, однако она не может быть принята в качестве универсальной. Но все же в рассмотренном случае достаточно было определить знак σ, чтобы составить представление о графике ($x + \frac{1}{x}$ или $x - \frac{1}{x}$).

Приведем еще пример построения графиков функций вида $mf(kx+b)+p$ (см. рис. 103).

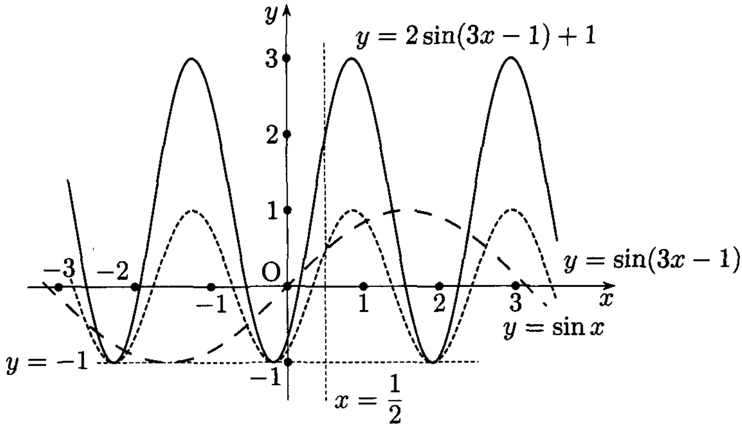
Применим рассуждения из этого параграфа к графикам уравнений вида

$$f(kx+b, my+p) = 0, \ldots \tag{2}$$

Если $y = \varphi(x)$ — одна из функций, определяемых уравнением $f(x,y) = 0$, то уравнением (2) определяется функция

$$y = \frac{1}{m}\varphi(kx+b) - \frac{p}{m}, \ldots \tag{3}$$

график которой, как установлено, есть результат сжатия к двум прямым, параллельным координатным осям графика функции $\varphi(x)$. Совокупность графиков всех функций (2) является графиком уравнения (1); поэтому можно сформулировать следующее правило: *график уравнения* $f(kx+b, my+p) = 0$ ($k \neq 0$ и $k \neq 1$, $m \neq 0$ и $m \neq 1$) есть результат сжатия графика $f(x,y) = 0$ к оси $y = \frac{p}{1-m}$ с коэффициентом, равным $\frac{1}{m}$, и сжатия к оси $x = \frac{b}{k}$ с коэффициентом, равным k.



$mf(kx+b)+p = 2\sin(3x-1)+1$

Рис. 103

Упражнения

Постройте графики функций.

49. $2\log_2(1-3x)-1$.

50. $-2\arcsin(1-2x)+1$.

ГЛАВА 4

ВРАЩЕНИЕ

§ 16. Симметрия относительно прямой $y = kx$. Графики взаимно обратных функций

Симметрия относительно координатных осей или прямых, им параллельных, была рассмотрена ранее. Сейчас же поставим себе задачу установить соотношение между координатами точек, симметричных относительно любой прямой $y = kx$, проходящей через начало координат

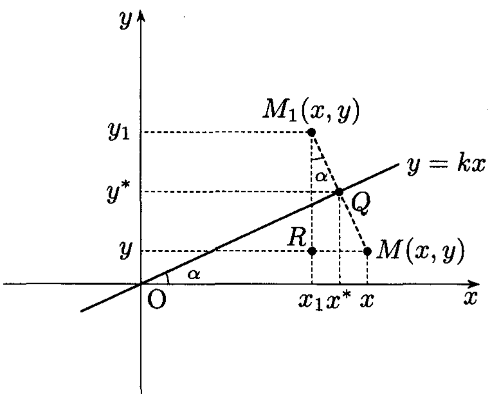


Рис. 104

(см. рис. 104). Пусть точки $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ симметричны относительно прямой $y = kx$; тогда если точка $Q(x^*, y^*)$ есть середина отрезка MM_1, то

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{x + x_1}{2}, \\ y^* = \dfrac{y + y_1}{2}. \end{cases}$$

Точка Q принадлежит прямой $y = kx$, поэтому

$$y + y_1 = k(x + x_1). \qquad (1)$$

Из треугольника RM_1M (см. рис. 104) находим

$$x - x_1 = (y - y_1)k, \tag{2}$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$; α — угол наклона прямой $y = kx$ к оси абсцисс. Читатель может самостоятельно убедиться, что соотношения (1) и (2) верны при любом значении угла*) α. Решая систему уравнений (1) и (2) относительно x_1 и y_1, получим

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-k^2}{1+k^2}x + \dfrac{2k}{1+k^2}y, \\ y_1 = \dfrac{2k}{1+k^2}x - \dfrac{1-k^2}{1+k^2}y. \end{cases} \tag{3}$$

Известно, что если $\operatorname{tg}\alpha = k$, то $\sin 2\alpha = \dfrac{2k}{1+k^2}$, а $\cos 2\alpha = \dfrac{1-k^2}{1+k^2}$; поэтому формулы (3) могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} x_1 = x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha, \\ y_1 = x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha. \end{cases} \tag{4}$$

В силу симметрии точек M и M_1 мы получим аналогичные соотношения, выражающие координаты x и y через x_1 и y_1:

$$\begin{cases} x = x_1\cos 2\alpha + y_1\sin 2\alpha, \\ y = x_1\sin 2\alpha - y_1\cos 2\alpha. \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что при $\alpha = 90^\circ$ или $\alpha = 270^\circ$ формулы (4) примут вид

$$\begin{cases} x_1 = -x, \\ y_1 = y, \end{cases}$$

т. е. будут выражать соотношения между координатами точек, симметричных относительно оси ординат, установленные нами в § 2. Точно так же при $\alpha = 0^\circ$ или $\alpha = 180^\circ$ получим

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = -y; \end{cases}$$

это условие симметричности точек относительно оси абсцисс (см. § 1).

---

*) Случаи $\alpha = 90^\circ m$, $m \in \mathbb{Z}$, исключаются из рассмотрения, так как они приводят к изученным ранее симметриям относительно координатных осей.

Представляет интерес случай $\alpha = 45^\circ$ (или $\alpha = 225^\circ$). В этом случае соотношения (4) примут вид

$$\begin{cases} x_1 = y, \\ y_1 = x. \end{cases}$$

При $\alpha = 45^\circ$ имеем $k = 1$ и ось симметрии $y = x$ является биссектрисой координатных углов I и III четверти. Оказывается, графики функций $y = f(x)$ и $x = f(y)$ должны быть симметричны относительно прямой $y = x$. Если из уравнения $x = f(y)$ можно выразить y как явную функцию переменной x, то, как известно, такая функция называется обратной по отношению к функции $f(x)$. В курсах алгебры устанавливается, что если функция $f(x)$ монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на отрезке $[f(a), f(b)]$ (или $[f(b), f(a)]$, если функция $f(x)$ убывающая), определена обратная ей функция $F(x)$.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

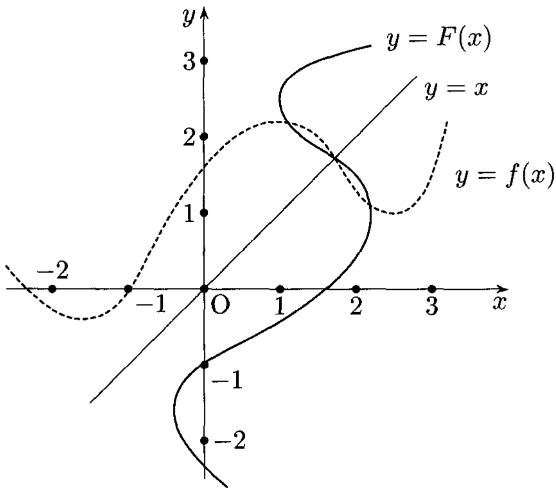


Рис. 105

Если функция $f(x)$ не монотонна и область ее определения можно разбить на промежутки, в которых сохраняется монотонность, то для функции $f(x)$ можно в каждом из промежутков монотонности указать обратную ей функцию; совокупность графиков всех обратных функций является графиком, симметричным графику $f(x)$ относительно прямой $y = x$.

На рис. 105 изображены графики взаимно обратных функций $f(x)$ и $F(x)$.

Переходя к графикам уравнений вида $f(x,y)=0$, получим следующее правило: *графики уравнений* $f(x,y)=0$ *и* $f(y,x)=0$ *симметричны относительно прямой* $y=x$.

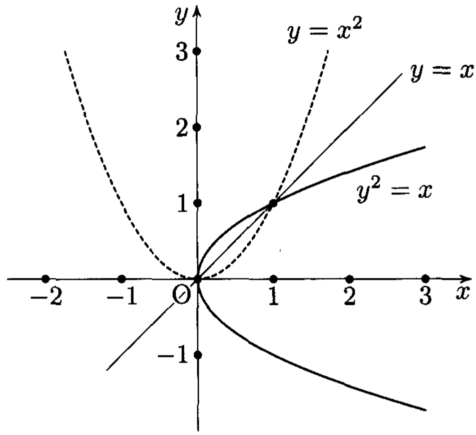


Рис. 106

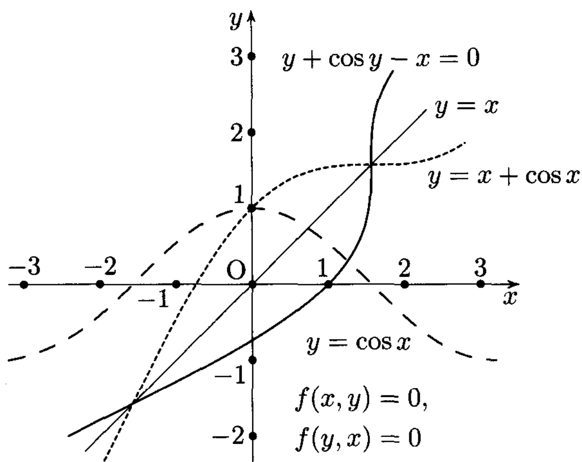


Рис. 107

На рис. 106 построен график уравнения $y^2-x=0$ как результат симметрии графика $y=x^2$ относительно прямой $y=x$.

Встречавшийся ранее график уравнения $y+\cos y-x=0$ (см. рис. 14), из которого нельзя выразить y как явную функцию переменной x, был построен как кривая, симметричная графику уравнения $x + \cos x - y = 0$, определяющего y в виде явной функции x, а именно $y = x + \cos x$. График этой функции строится путем сложения ординат точек, принадлежащих графикам $y = x$ и $y = \cos x$ (см. рис. 107).

Упражнения

Постройте графики уравнений.

51. $y - \cos y - x = 0$.

52. $y^2 - 4y - x + 3 = 0$.

§ 17. Вращение

В этом параграфе мы рассмотрим графики функций, образующиеся в результате вращения вокруг начала координат графиков некоторых исходных функций.

Условимся считать положительным вращение против часовой стрелки. Мы можем вовсе не рассматривать отрицательных вращений, если углы поворота будем считать изменяющимися от 0° до 360°.

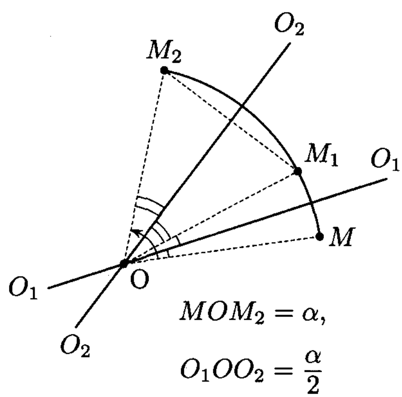


Рис. 108

Из геометрии известно, что вращение можно рассматривать как результат двух последовательных осевых симметрий относительно осей, пересекающихся в центре вращения и составляющих между собой угол, равный половине угла вращения. Напомним доказательство этого утверждения (читатель, знакомый с ним, может этот абзац настоящего параграфа пропустить).

Пусть точка M (см. рис. 108) в результате вращения на угол α вокруг центра O перешла в точку M_2. Построим две произвольные прямые OO_1

и OO_2, пересекающиеся в точке O и образующие между собой угол $\frac{\alpha}{2}$, отсчитываемый от OO_1 к OO_2. Тогда если точка M подвергается осевой симметрии относительно оси OO_1, то она перейдет в точку M_1, и при этом $\angle MOO_1 = \angle O_1OM_1$; если затем точка M_1 подвергается осевой симметрии относительно оси OO_2, то она перейдет в точку M_2, потому что $\angle M_1OO_2 = \angle O_2OM_2$ и $\angle MOM_2 = 2(\angle O_1OM_1 + \angle M_1OO_2) = 2\angle O_1OO_2 - \alpha$.

Итак, вращение можно рассматривать как результат двух последовательных осевых симметрий относительно осей, удовлетворяющих изложенным выше требованиям.

Пусть точка $M(x,y)$, принадлежащая графику функции $y = f(x)$, подверглась вращению на угол ω ($\omega > 0$) и перешла в точку $M_1(x_1, y_1)$. Координаты точки M_1 можно найти, воспользовавшись формулами (4) § 16, если рассматривать вращение как результат двух последовательных осевых симметрий относительно прямых $y = kx$ и $y = mx$ или $y = x\operatorname{tg}\alpha$ и $y = x\operatorname{tg}\beta$ при условии $\beta - \alpha = \frac{\omega}{2}$ (см. рис. 109).

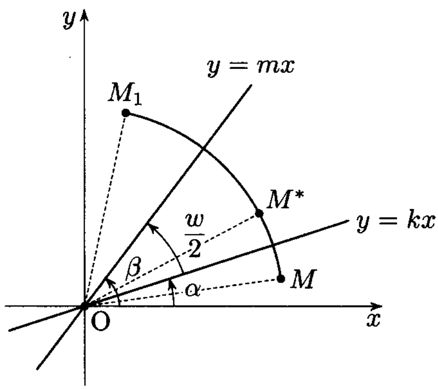


Рис. 109

В результате симметрии относительно оси $y = kx$ получим точку $M^*(x^*, y^*)$, координаты которой равны

$$\begin{cases} x^* = x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha, \\ y^* = x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha. \end{cases}$$

После симметрии относительно оси $y = mx$ получим точку $M_1(x_1, y_1)$, координаты которой равны

$$\begin{cases} x_1 = x^*\cos 2\beta + y^*\sin 2\beta, \\ y_1 = x^*\sin 2\beta - y^*\cos 2\beta. \end{cases}$$

Подставив в последние формулы вместо x^* и y^* их выражения через x и y, получим

$$\begin{cases} x_1 = (x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha)\cos 2\beta + (x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha)\sin 2\beta, \\ y_1 = (x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha)\sin 2\beta - (x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha)\cos 2\beta, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = x(\cos 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\alpha\sin 2\beta) - y(\sin 2\beta\cos 2\alpha - \cos 2\beta\sin 2\alpha), \\ y_1 = x(\sin 2\beta\cos 2\alpha - \cos 2\beta\sin 2\alpha) + y(\cos 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\alpha\sin 2\beta), \end{cases}$$

и наконец,

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\omega - y\sin\omega, \\ y_1 = x\sin\omega + y\cos\omega. \end{cases} \tag{1}$$

Соотношения (1) выражают зависимость координат точки M_1, полученной в результате вращения точки M на угол ω, от координат точки M.

Для нас представляют интерес выражения координат x и y через x_1 и y_1, которые можно найти, решив систему уравнений (1) относительно x и y

$$\begin{cases} x = x_1\cos\omega + y_1\sin\omega, \\ y = -x_1\sin\omega + y_1\cos\omega. \end{cases} \tag{2}$$

В частности, для $\omega = 45^\circ$ и $\omega = 135^\circ$ получим соответственно

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1\sqrt{2}}{2} + \dfrac{y_1\sqrt{2}}{2}, \\ y = -\dfrac{x_1\sqrt{2}}{2} + \dfrac{y_1\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad (\omega = 45^\circ) \tag{3}$$

и

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1\sqrt{2}}{2} - \dfrac{y_1\sqrt{2}}{2}, \\ y = \dfrac{x_1\sqrt{2}}{2} + \dfrac{y_1\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad (\omega = 315^\circ). \tag{4}$$

Пусть имеется уравнение $F(x,y) = 0$. Если для левой части этого уравнения, т. е. $F(x,y)$, осуществимо тождественное преобразование

$$F(x,y) = f\left(\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{y\sqrt{2}}{2}, -\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{y\sqrt{2}}{2}\right),$$

то на основании формул (3) настоящего параграфа мы можем утверждать, что график уравнения $F(x,y)=0$ есть результат вращения графика уравнения $f(x,y)=0$ на угол 45°. Например, уравнение $y^2-x^2-2=0$ может быть представлено в виде

$$(y+x)(y-x)=2,$$

или

$$\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}+\frac{y\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{x\sqrt{2}}{2}+\frac{y\sqrt{2}}{2}\right)=1;$$

поэтому график уравнения $y^2-x^2-2=0$, или $y^2-x^2=2$, может быть построен в результате вращения графика уравнения $xy=1$ (т. е. гиперболы) на угол 45° вокруг начала координат (см. рис. 110).

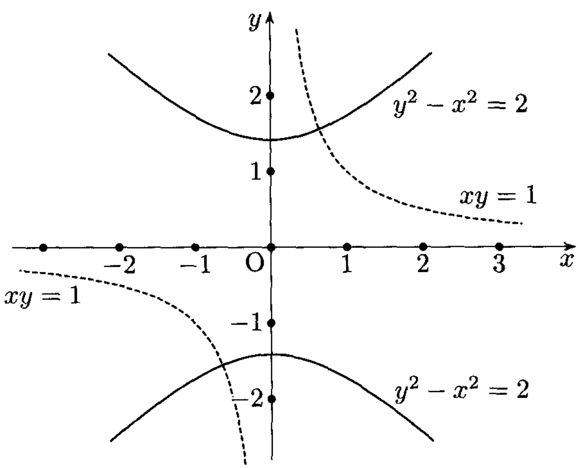


Рис. 110

В общем случае мы приходим к следующему правилу: *если для какой-нибудь функции с двумя неизвестными $F(x,y)$ осуществимо тождественное преобразование вида $F(x,y)=f(ax+by,-bx+ay)$, где $a^2+b^2=1$, то график уравнения $F(x,y)=0$ есть результат вращения графика уравнения $f(x,y)=0$ вокруг начала координат на угол ω, определяемый из соотношений $a=\cos\omega$, $b=\sin\omega$.*

Вероятно, читатель заметил, что практическое применение этого правила для построения графиков уравнений затруднительно. В самом деле, нелегко обнаружить, что функция

$$F(x,y)=3y^2+x^2+2xy\sqrt{3}-2y-2x\sqrt{3}$$

может быть представлена в виде

$$F(x, y) = \frac{y}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

и удовлетворяет изложенному выше правилу, поэтому ее график получается вращением параболы $y = x^2$ на угол 60° (см. рис. 111).

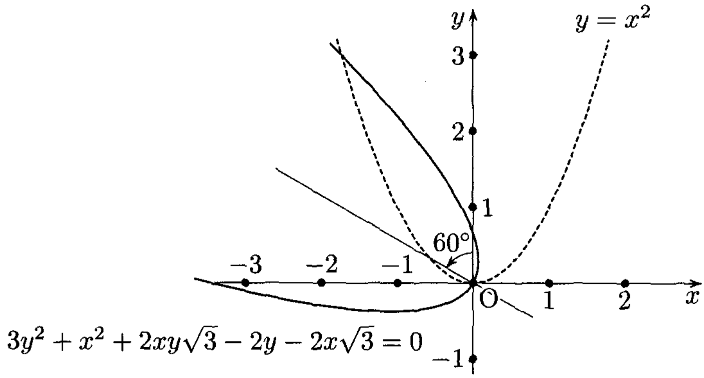


Рис. 111

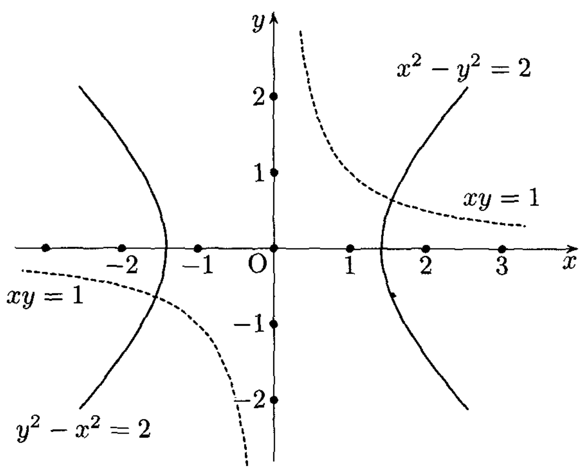


Рис. 112

Формулы (2) настоящего параграфа применяются чаще всего для решения обратной задачи: отыскания вида функции $F(x, y)$, для которой график уравнения $F(x, y) = 0$ получен в результате вращения графика уравнения $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — известная функция. Например, найти уравнение $F(x, y) = 0$, если его график получен вращением гиперболы $xy = 1$ на угол $315°$ $(-45°)$. Применяя формулы (4), получим $(x - y)(x + y) \cdot \frac{1}{2} = 1$, или $x^2 - y^2 = 2$ (см. рис. 112).

Упражнения

Постройте графики уравнений.

53. $y - x = \sqrt{2}\sin\frac{x + y}{\sqrt{2}}$ *).

54. $2^y + x = 0$.

55. $x = \lg(-y)$.

*) Указание. Представьте уравнение в виде

$$-\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{y\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{y\sqrt{2}}{2}\right).$$

ГЛАВА 5
ИНВЕРСИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ

§ 18. Графики функций $f(x)$ и $\dfrac{1}{f(x)}$

Название настоящей главы не является общеупотребительным термином. Мы ввели его с целью краткого обозначения рассматриваемого в этой главе преобразования, по аналогии с преобразованием, известным под названием «инверсия относительно окружности».

Так же как в случае инверсии относительно окружности, когда для двух соответствующих друг другу точек требуется инвариантность произведений расстояний от них до центра инверсии, при инверсии относительно прямой мы будем требовать инвариантности произведений расстояний от двух соответствующих точек до некоторой прямой. В этом параграфе такой прямой служит ось абсцисс.

Рассмотрим графики функций $f(x)$ и $\dfrac{1}{f(x)}$. Очевидно, для одной и той же абсциссы x произведение $f(x) \cdot \dfrac{1}{f(x)}$ равно 1, т. е. график одной из этих функций образуется в результате инверсии графика другой функции относительно оси абсцисс.

Простейшим примером служат графики функций $y = x$ и $y = \dfrac{1}{x}$, хорошо известные читателю. В результате инверсии биссектрисы координатных углов I и III четверти относительно оси абсцисс получаем гиперболу, и наоборот, — инверсией гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ является биссектриса координатных углов I и III четверти.

Мы должны сделать важное замечание. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$, тогда $\dfrac{1}{f(x)} = x$. Поскольку функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не определена в точке O, мы должны прийти к выводу, что функция $y = x$ не определена при $x = 0$?! Выходом из создавшегося положения служит применение принципа «продолжения по непрерывности». Условимся, что если $f(x)$ в какой-нибудь точке x_0 не определена, но $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \pm\infty$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ в точке x_0 равна нулю. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. При $x = 2$ функция $f(x)$ не определена, но приведенное выше правило не применимо, потому что условие $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \pm\infty$ здесь не выполняется и функция $\dfrac{1}{f(x)}$ в точке $x=2$ также не определена, но в точке $x=1$ функция $f(x)$ не определена, а функция $\dfrac{1}{f(x)}$ равна 0. В этом случае $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \infty$.

Построение графика функции $\dfrac{1}{f(x)}$ по точкам совершенно очевидно. Каждой точке графика функции $f(x)$ с координатами (x,y) ставится в соответствие точка графика функции $\dfrac{1}{f(x)}$ с координатами $\left(x, \dfrac{1}{y}\right)$, при этом можно воспользоваться графиками функций $y=f(x)$ и $y=\dfrac{1}{x}$ (см. рис. 113).

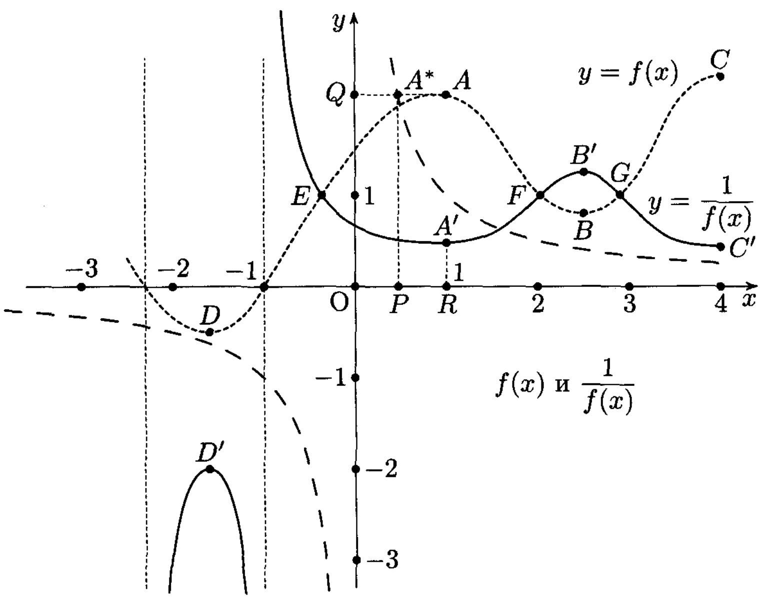


Рис. 113

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная своим графиком, изображенным на рис. 113 прерывистой линией; график функции $y=\dfrac{1}{x}$, (гипербола) изображен пунктиром. Желая построить график функции $\dfrac{1}{f(x)}$, мы должны каждой точке A графика функции $f(x)$ поставить в соответствие точку A' графика функции $\dfrac{1}{f(x)}$. Точку A' можно найти построением. Сначала найдем точку A^*, имеющую такую же ординату y, что и точка A, и принадлежащую гиперболе $\frac{1}{x}$ (см. рис. 113). Тогда по свойству гиперболы отрезок $A^*Q = OP$ должен быть равен $\frac{1}{y}$, т. е. ординате точки A'. Абсциссы точек A и A' равны. Остается отложить от точки R отрезок $RA' = OP$, — и точка A' построена.

Таким способом можно построить сколько угодно точек графика функции $\frac{1}{f(x)}$. Разумеется, чем больше точек графика построено, тем точнее сам график; но не следует забывать, что всяким графиком функция задается только *приближенно* и графики функций используются чаще не для расчетов, а для составления общего представления о характере функции, ее особенностях. Поэтому не следует стремиться к построению максимального числа точек. Нужно сначала установить неподвижные точки при данном преобразовании, т. е. точки, в которых $f(x) = 1$. Действительно, если $f(x) = \pm 1$, то и $\frac{1}{f(x)} = \pm 1$. На нашем рисунке это точки E, F и G.

Затем на графике функции $f(x)$ следует отметить характерные точки (локальные экстремумы, точки перегиба, точки резкого изменения функции и т. д.). На рис. 113 это точки A, B, C и D. Полезно также нанести несколько промежуточных точек. После построения соответствующих точек графика функции $\frac{1}{f(x)}$ (A', B', C', D') следует установить асимптоты графика функции $\frac{1}{f(x)}$. Мы рассмотрим только асимптоты, параллельные координатным осям. Если функция $f(x)$ обращается в нуль в точке x_0, т. е. $f(x_0) = 0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ в этой точке не определена, однако $\frac{1}{f(x)} \to \pm\infty$, поэтому прямая $x = x_0$ служит асимптотой графика функции $\frac{1}{f(x)}$. В нашем примере график функции $\frac{1}{f(x)}$ имеет две асимптоты, параллельные оси ординат, проходящие через точки, в которых $f(x)$ обращается в нуль (см. рис. 113).

Если $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} a$, то $\frac{1}{f(x)} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}$, поэтому прямая $y = \frac{1}{a}$ является асимптотой графика функции $\frac{1}{f(x)}$. На рис. 113 таких асимптот нет, но читатель найдет их в следующих примерах (см. рис. 118).

Если $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, то $\frac{1}{f(x)} \to 0$, поэтому ось абсцисс служит асимптотой графика функции $\frac{1}{f(x)}$ (см. рис. 114 и 117).

Рассмотрим несколько примеров построения графиков функций $\frac{1}{f(x)}$ для некоторых хорошо известных в средней школе функций $f(x)$.

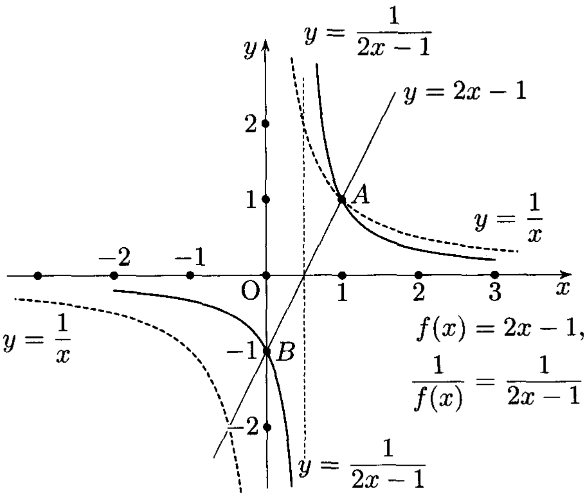


Рис. 114

Пусть $f(x) = 2x - 1$ (см. рис. 114) и необходимо построить график функции $y = \frac{1}{2x-1}$. Выполняя изложенные выше требования, построим предварительно графики функций $y = 2x - 1$ и $y = \frac{1}{x}$. Устанавливаем на графике функции $y = 2x - 1$ точки, остающиеся неподвижными при инверсии, т. е. точки с ординатами ± 1. На рис. 114 это точки A и B. Затем строим асимптоту $x = \frac{1}{2}$ и замечаем, что асимптотой должна служить также ось абсцисс. Теперь остается построить столько точек графика функции $\frac{1}{2x-1}$, сколько будет сочтено достаточным, в зависимости от степени точности построения.

График функции $y = \frac{1}{2x-1}$ можно рассматривать так же, как график функции $f(kx+b)$, если $f(x) = \frac{1}{x}$. Тогда он может быть построен в результате сжатия в 2 раза графика функции $\frac{1}{x}$ к оси $x = 1$ (см. § 13). На рис. 115 для сравнения показан этот способ построения.

На рис. 116, 117, 118 изображены графики функций $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 1}$, $y = \log_x 2$ и $y = \frac{1}{2^x - 3}$, построенные как графики функций $\frac{1}{f(x)}$.

В § 15 рассматривался график функции вида $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$. Сейчас представляется возможность рассмотреть график функции $y = \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c}$ (дробно-линейной квадратичной функции) как

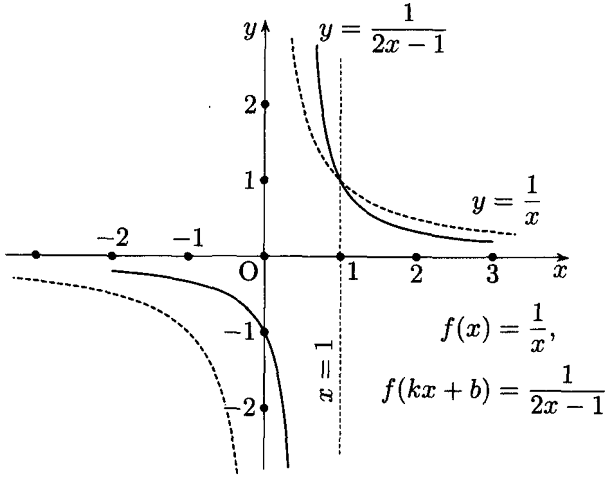


Рис. 115

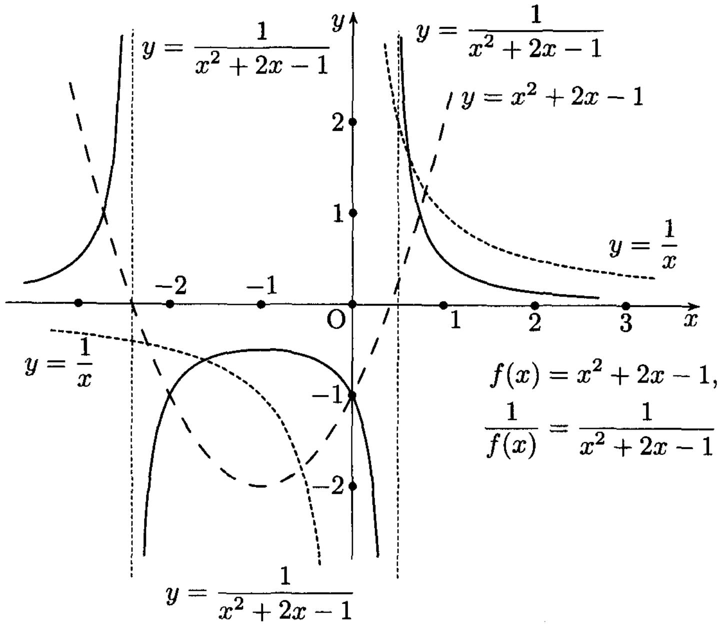


Рис. 116

результат инверсии графика функции $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ относительно оси абсцисс. Наши замечания по поводу построения графика функции $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$, сделанные в конце § 15, целиком относятся к построению графика функции $y = \dfrac{dx+e}{ax^2+bx+c}$.

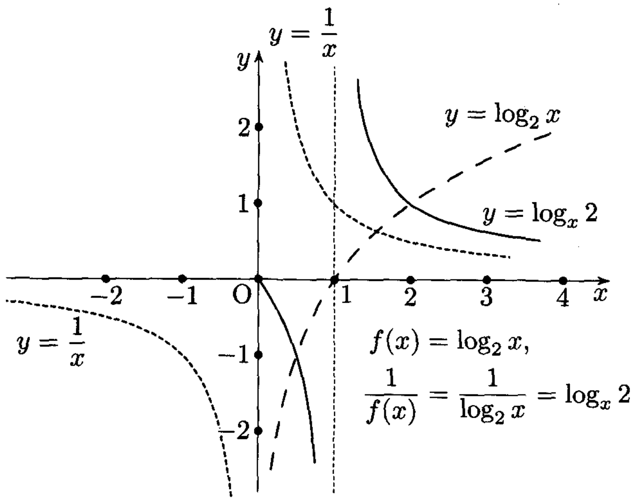


Рис. 117

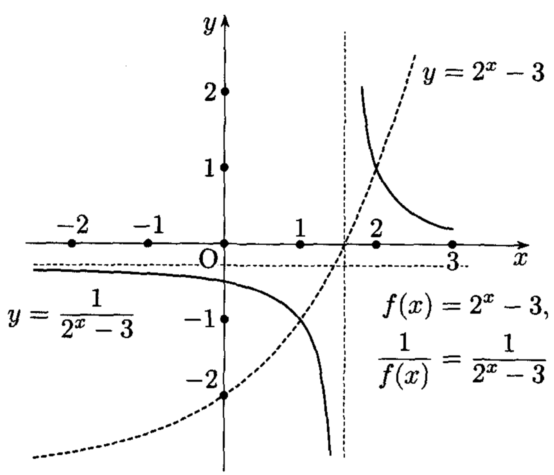


Рис. 118

Упражнения

Постройте графики функций.

56. $y = \operatorname{cosec} x$.

57. $y = \dfrac{1}{\arcsin x}$.

58. $y = \dfrac{1}{\arccos x}$.

§ 19. Графики функций $f(x)$ и $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

В этом параграфе мы рассмотрим графики функций вида $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, являющиеся результатом инверсии графика функции $f(x)$ относительно оси ординат.

Равенство $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$ справедливо, если $\dfrac{1}{x_1} = x$, т. е. $xx_3 = 1$. Любой точке $M(x, y)$ графика функции $f(x)$ соответствует точка $M_1(x_1, y_1)$ графика функции $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, если $x_1 = \dfrac{1}{x}$ и $y_1 = y$; это означает, что график функции $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ может быть получен в результате инверсии графика функции $f(x)$ относительно оси ординат. Для построения графика функции $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ удобно воспользоваться гиперболой $y = \dfrac{1}{x}$.

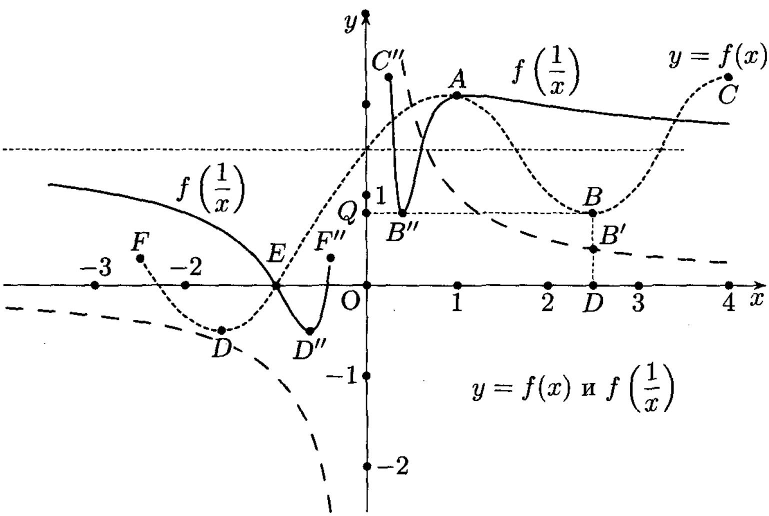


Рис. 119

На рис. 119 выполнено построение графика функции $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ как результата инверсии графика функции $f(x)$ относительно оси ординат.

Точки графика функции $f\left(\frac{1}{x}\right)$, соответствующие точкам A, B, C, D графика функции $f(x)$, обозначены буквами A'', B'', C'', D''. На рисунке показано построение точки B'', соответствующей точке B. Точка B'' должна иметь ту же ординату, что и точка B ($BP = OQ$), абсциссу же точки B'' найдем построением; она равна отрезку PB', который находится с помощью гиперболы. По свойству гиперболы $y = \frac{1}{x}$, т. е. $PB' = \frac{1}{x}$, если $OP = QB = x$. Построив $QB' = PB'$, найдем точку B''.

Таким способом можно построить любое число точек графика функции $f\left(\frac{1}{x}\right)$. При выборе точек следует руководствоваться замечанием из § 18. При инверсии графика функции $f(x)$ относительно оси ординат остаются неподвижными точки с абсциссами ± 1. Действительно, $f(\pm 1) = f\left(\frac{1}{\pm 1}\right)$. На рис. 119 это точки A и E. Заметим, далее, что при $x = 0$ функция $f\left(\frac{1}{x}\right)$ не определена, но если $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} a$, то $f\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a$, и поэтому, применяя принцип «продолжения по непрерывности», можем положить $f\left(\frac{1}{x}\right) = a$ при $x = 0$.

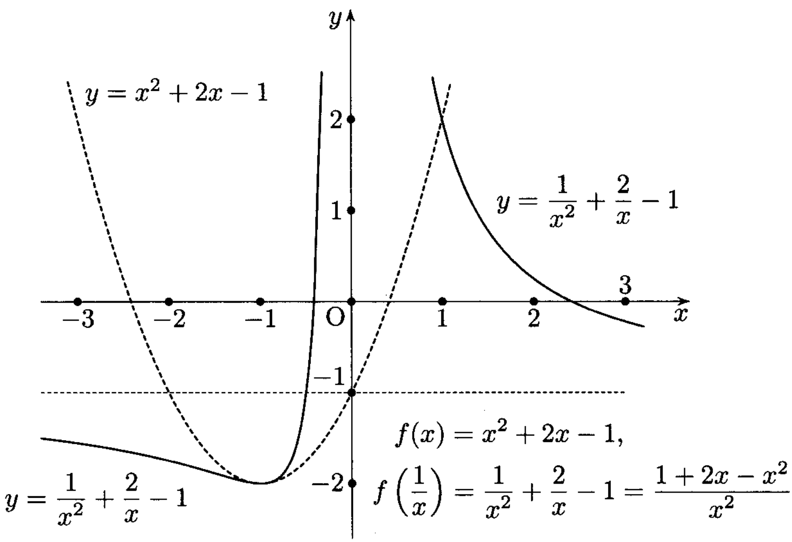


Рис. 120

Рассмотрим теперь асимптоты графика функции $f\left(\frac{1}{x}\right)$, параллельные координатным осям. Если $f(0) = a$, то $f\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} a$ и прямая $y = a$

является асимптотой графика функции $f\left(\frac{1}{x}\right)$, параллельной оси абсцисс или совпадающей с осью абсцисс (при $a = 0$); см. рис. 120 и 121. Если же $f(x) \underset{x\to 0}{\to} \pm\infty$, то график функции $f\left(\frac{1}{x}\right)$ не имеет асимптот, параллельных оси абсцисс (см. рис. 122).

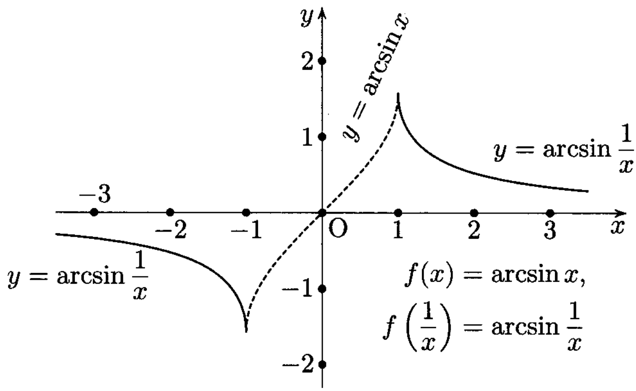


Рис. 121

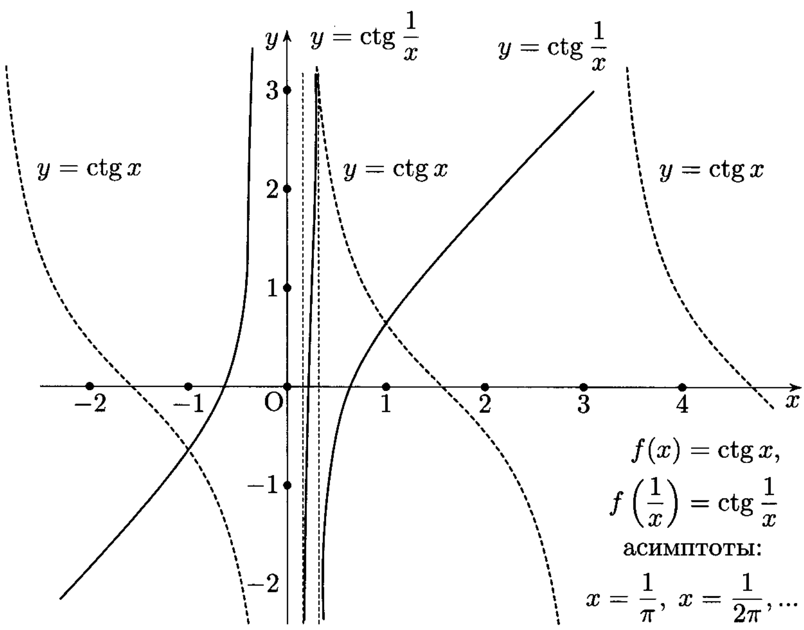


Рис. 122

Если $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$, то $f\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 1/a}{\longrightarrow} \pm\infty$, стало быть, прямая $x=\frac{1}{a}$ является асимптотой графика функции $f\left(\frac{1}{x}\right)$, параллельной оси ординат (см. рис. 122). В частности, если $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, то $f\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$ и асимптотой графика функции $f\left(\frac{1}{x}\right)$ служит ось ординат (см. рис. 120).

Наши рассуждения об асимптотах графиков функций $\frac{1}{f(x)}$ (см. § 18) и $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (см. § 19) нельзя считать строгими. Они дают удобное в практике правило для построения асимптот, параллельных координатным осям. Вопрос об асимптотах, не параллельных координатным осям, здесь вовсе не рассматривался. Эти вопросы выходят за рамки настоящей книги, строгое их изложение читатель найдет в любом курсе дифференциальной геометрии или в главах математического анализа, посвященных геометрическим приложениям*).

Умение строить графики функций $\frac{1}{f(x)}$ и $f\left(\frac{1}{x}\right)$ достигается не столько ознакомлением с изложенными в § 18, 19 правилами, сколько самостоятельными упражнениями, которые мы настоятельно рекомендуем читателю.

Упражнения

Постройте графики функций.

59. $y=\sin\frac{1}{x}$.

60. $y=2^{\frac{1}{x}}$.

61. $y=\arccos\frac{1}{x}$.

62. $y=\frac{x^2+2x-1}{x^2}$ $\left(y=1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

*) См., например, Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. — ОНТИ, 1938 (гл. 1, § 10).

ГЛАВА 6

НЕКОТОРЫЕ НЕЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

§ 20. Функция $|x|$, ее график. Графики функций $|f(x)|$ и $f(|x|)$

Как известно, $|x| = x$, если $x \geqslant 0$, и $|x| = -x$, если $x \leqslant 0$. Поэтому для положительных значений аргумента x график функции $y = |x|$ совпадает с графиком $y = x$, а для отрицательных значений аргумента график функции $y = |x|$ совпадает с графиком функции $y = -x$ (см. рис. 123).

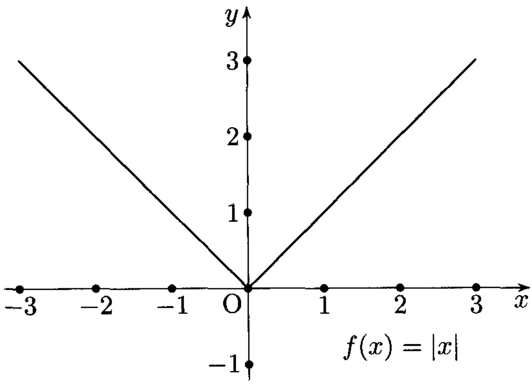


Рис. 123

Функция $y = |x|$, очевидно, четная, ее график симметричен относительно оси ординат.

Рассмотрим график функции $y = |f(x)|$. Для значений аргумента x, при которых $f(x) > 0$, график функции $y = |f(x)|$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$; для тех значений аргумента, при которых $f(x) < 0$, график функции $y = |f(x)|$ должен совпадать с графиком $y = -f(x)$.

Таким образом, *для построения графика $y = |f(x)|$ нужно сохранить части графика функции $f(x)$, находящиеся над осью абсцисс, а для частей графика функции $f(x)$, находящихся под осью абсцисс, построить им симметричные относительно оси абсцисс* (см. рис. 124).

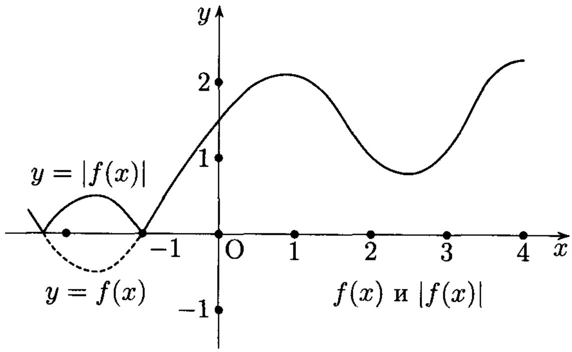


Рис. 124

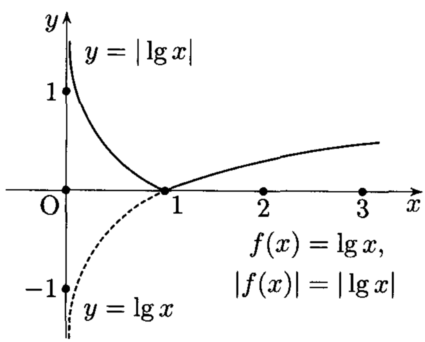


Рис. 125

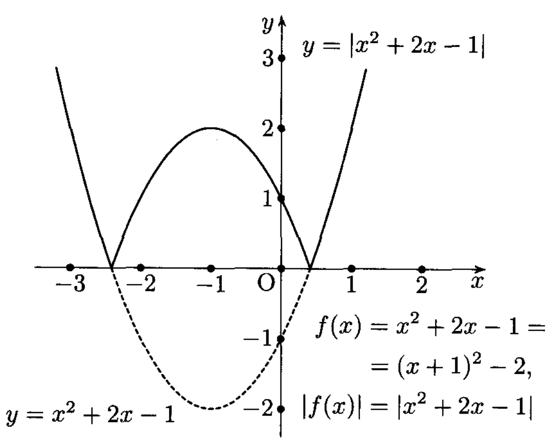


Рис. 126

По этому правилу построены приведенные на рис. 125–127 графики функций $y = |\lg x|$, $y = |x^2 - 2x - 1|$ и $y = |\arcsin x|$.

График функции $y = f(|x|)$, очевидно, совпадает с графиком функции $f(x)$ для всех неотрицательных значений аргумента x. Для отрицательных значений x имеем $f(|x|) = f(-x)$, поэтому мы приходим к следующему правилу: *график функции $f(|x|)$ симметричен относительно оси ординат; при этом для неотрицательных значений аргумента x он совпадает с графиком функции $f(x)$* (см. рис. 128).

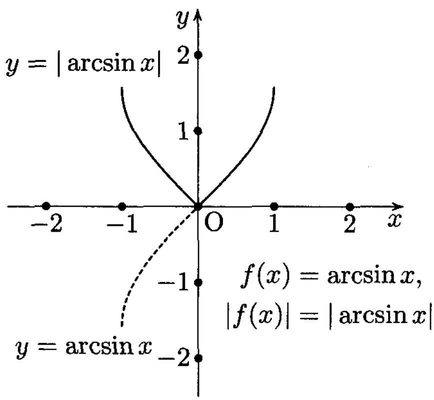


Рис. 127

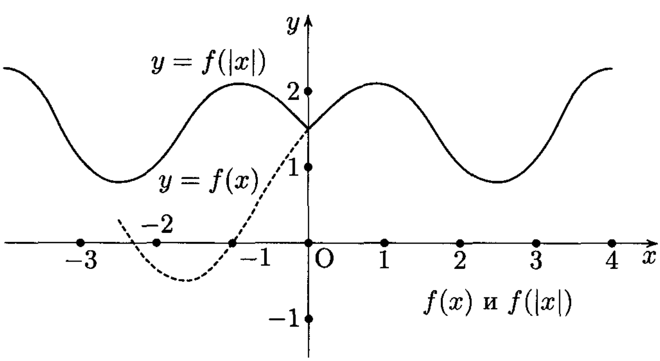


Рис. 128

Характер графика функции $f(x)$ при отрицательных значениях x не играет никакой роли для построения графика функции $f(|x|)$. На рис. 129–131 приведены примеры построения графиков функций $f(|x|)$, а именно: $y = \lg|x|$, $y = |x|^2 - 2|x| - 1$ и $y = 2^{|x|}$.

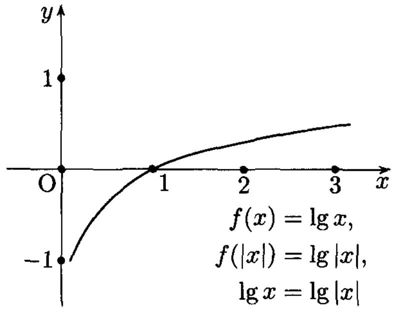


Рис. 129

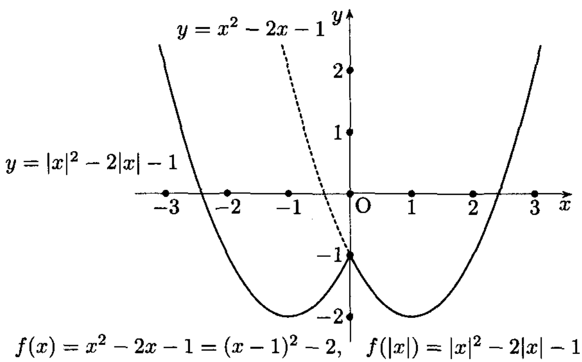


Рис. 130

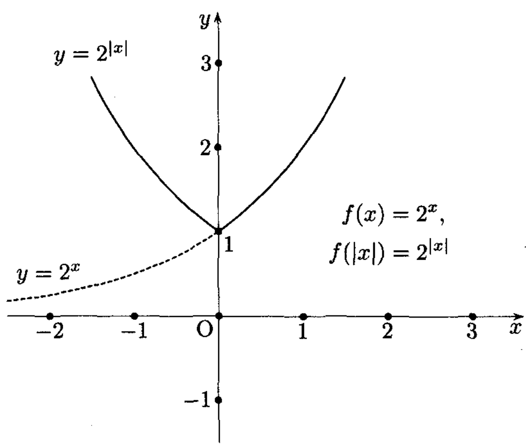


Рис. 131

Упражнения

Постройте графики функций.

63. $y = |x^2 + 2x - 1|$.

64. $y = |x|^2 + 2|x| - 1$.

65. $y = |\sin x|$.

66. $y = \sin |x|$.

67. $y = \left|\dfrac{1}{x}\right|$.

68. $y = \arccos |x|$.

§21. Функция $[x]$, ее график. Графики функций $[f(x)]$ и $f([x])$

Символ $[x]$, где x — любое действительное число, обозначает целую часть числа x, т. е. *наибольшее целое число*, не превосходящее x. Иногда этот символ читается как «антье от x». Наиболее удобное название этого символа — *характеристика* числа x. Последним названием мы и будем пользоваться. Итак, характеристикой любого действительного числа назовем наибольшее целое число, не превосходящее данное число. Например,

$$[2,3] = 2, \quad [0,7] = 0, \quad [-\pi] = -4.$$

Таким образом, любое число x удовлетворяет соотношениям

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

Употребительное в курсе алгебры определение характеристики десятичного логарифма числа отвечает приведенному выше общему определению характеристики чисел.

График функции $y = [x]$ представляет собой как бы «лестницу» (см. рис. 132). Действительно, при всех значениях x, удовлетворяющих соотношениям $0 \leqslant x < 1$, выполняется равенство $[x] = 0$. Для $1 \leqslant x < 2$ имеем $[x] = 1$ и т. д.

Рассмотрим график функции $y = [f(x)]$. Для построения такого графика разобьем область определения функции $f(x)$ на промежутки, для каждого из которых выполняются соответственно соотношения:

$$\begin{gathered} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -3 \leqslant f(x) < -2, \\ -2 \leqslant f(x) < -1, \\ -1 \leqslant f(x) < 0, \\ 0 \leqslant f(x) < 1, \\ 1 \leqslant f(x) < 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

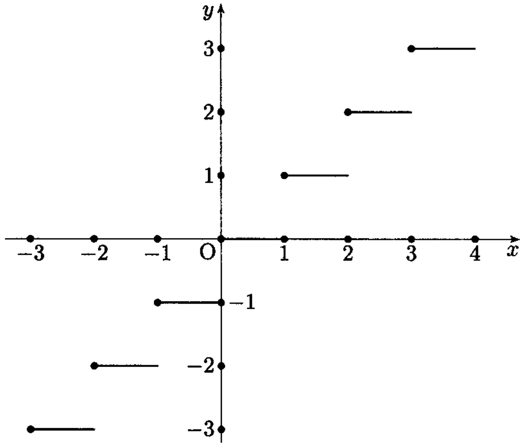


Рис. 132

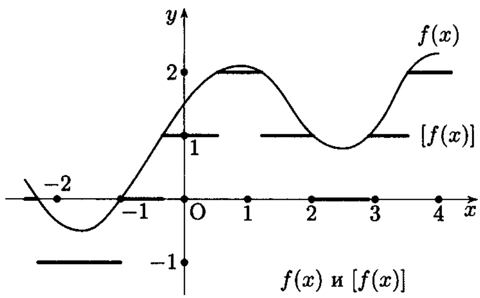


Рис. 133

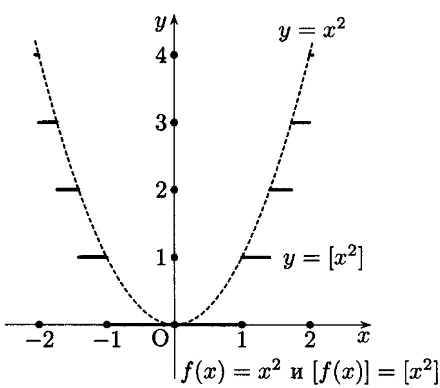


Рис. 134

Такое разбиение можно осуществить на самом графике функции $f(x)$ (см. рис. 133). Для каждого из промежутков соответственно получим

$$\begin{gathered}
\cdots\cdots\cdots \\
[f(x)] = -3, \\
[f(x)] = -2, \\
[f(x)] = -1, \\
[f(x)] = 0, \\
[f(x)] = 1 \\
\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

Поэтому график функции $[f(x)]$ будет иметь вид «лестницы», «ступеньки» которой имеют разную длину и разбросаны в беспорядке (см. рис. 133).

На рис. 134, 135 приведены графики функций $y = [x^2]$ и $y = [\sin x]$.

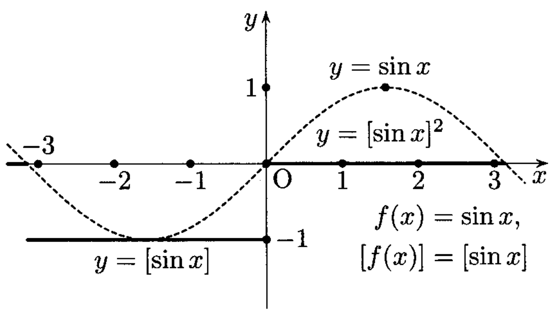


Рис. 135

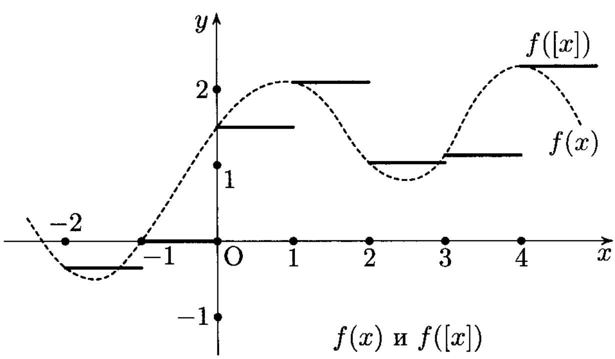


Рис. 136

Наряду с графиком функции $[f(x)]$ следует рассмотреть график функции $f([x])$. Для его построения следует разбить область определения функции $f(x)$ на промежутки

$$\begin{gathered}
\dots\dots\dots\dots \\
-2 \leqslant f(x) < 1, \\
-1 \leqslant f(x) < 0, \\
0 \leqslant f(x) < 1, \\
1 \leqslant f(x) < 2, \\
\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}$$

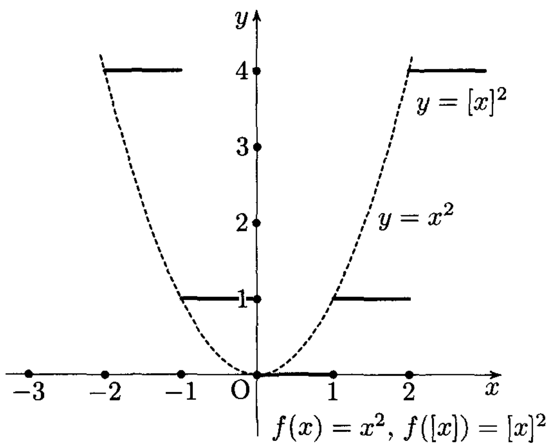


Рис. 137

В каждом из этих промежутков получим соответственно

$$\begin{gathered}
\dots\dots\dots\dots \\
[f(x)] = f(-2), \\
[f(x)] = f(-1), \\
[f(x)] = f(0), \\
[f(x)] = f(1), \\
\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}$$

Таким образом, график имеет вид (см. рис. 136) «лестницы» с беспорядочно расположенными «ступеньками», имеющими одну и ту же длину. На рис. 137 и 138 построены графики функций $y = [x]^2$ и $y = \sin[x]$.

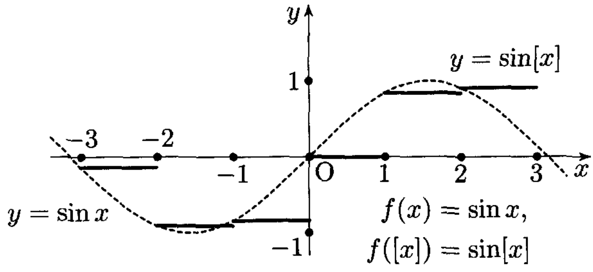


Рис. 138

Упражнения

Постройте графики функций.

69. $y=[2^x]$.

70. $y=[\arccos x]$.

71. $y=[x^2-2x-1]$.

72. $y=2^{[x]}$.

73. $y=\arccos[x]$.

74. $y=[x]^2-2[x]-1$.

§ 22. Функция $\{x\}$, ее график. Графики функций $\{f(x)\}$ и $f(\{x\})$

Символ $\{x\}$ обозначает дробную часть действительного числа. Мы будем называть его мантиссой числа. Определением величины $\{x\}$ может служить соотношение

$$x=[x]+\{x\},$$

т. е. каждое действительное число равно сумме своей характеристики и мантиссы. Из этого определения следует, что мантисса числа всегда неотрицательна (т. е. положительна или равна нулю) и меньше единицы. Действительно, $0\leqslant x-[x]=\{x\}<1$.

Приведем несколько примеров:

$$\{3\}=0,\quad \{3{,}35\}=0{,}35,\quad \{-3{,}35\}=0{,}65.$$

Приведенное выше определение мантиссы числа включает в себя, как частный случай, известное определение мантиссы десятичного логарифма числа. Очень часто в различных таблицах помещают не сами числа, а их мантиссы (см., например, таблицы Брадиса).

Для построения графика функции $y=\{x\}$ удобно воспользоваться соотношением $\{x\}=x-[x]$, т. е. рассматривать искомый график как «разность» графиков функций $y = x$ и $y = [x]$. Выполняя построение, получим график функции $\{x\}$ в виде наклонного «частокола» (см. рис. 139).

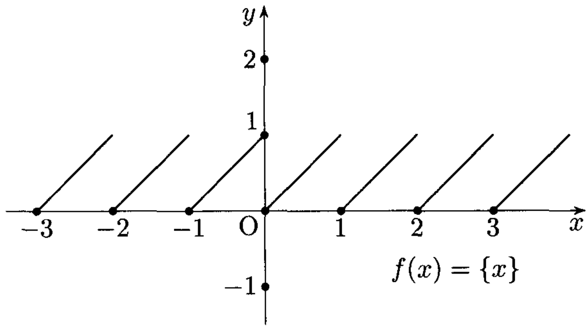


Рис. 139

Представляют интерес также графики функций $\{f(x)\}$ и $f(\{x\})$. Для построения графика функции $\{f(x)\}$ область определения функции $f(x)$ надо разбить на промежутки, в каждом из которых выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -1 \leqslant f(x) < 0, \\ 0 \leqslant f(x) < 1, \\ 1 \leqslant f(x) < 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Такое разбиение можно осуществить, пользуясь графиком функции $f(x)$ (см. рис. 140). Так как $\{f(x)\} = f(x) - [f(x)]$, для каждого из промежутков получим соответственно

$$\begin{gathered} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \{f(x)\} = f(x) + 1, \\ \{f(x)\} = f(x), \\ \{f(x)\} = f(x) - 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

На рис. 141 и 142 приведены графики функций $y = \{x^2\}$ и $y = \{\sin x\}$.

Для построения графика функции $f(\{x\})$ заметим, что $f(\{x\}) = f(x)$ в полуинтервале $[0, 1)$; поэтому $f(\{x\}) = f(x)$ при $0 \leqslant x < 1$ (см. рис. 143).

При изменении аргумента x от 1 до 2 функция $\{x\}$ изменяется от 0 до 1; поэтому график функции $f(\{x\})$ в полуинтервале $[1, 2)$ «повторяется». Для каждого из полуинтервалов $[n, n + 1)$, где n — любое целое

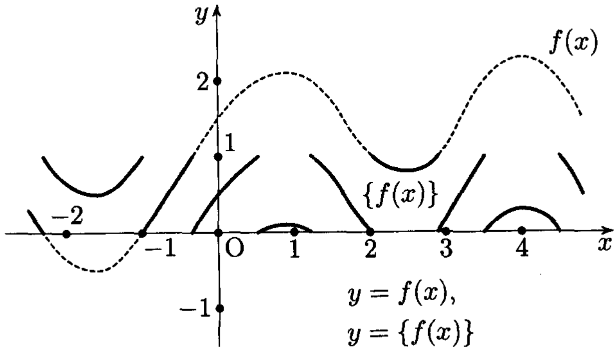


Рис. 140

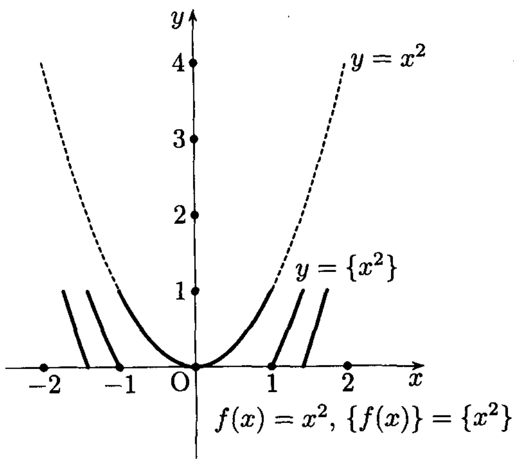


Рис. 141

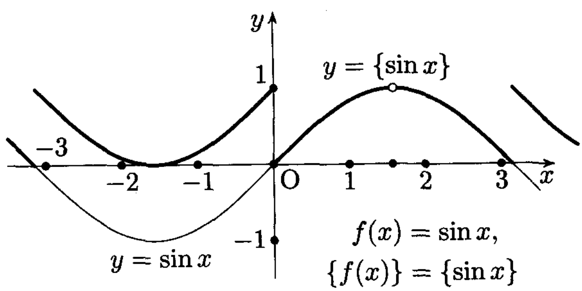


Рис. 142

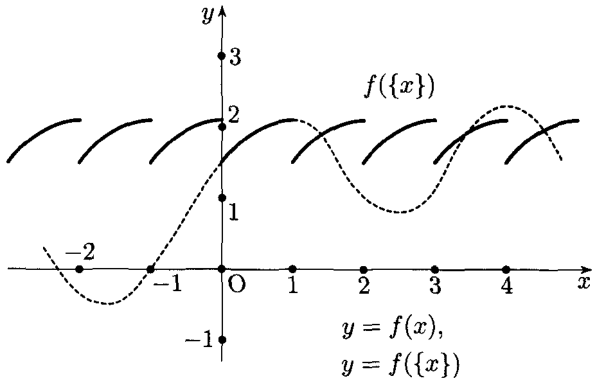


Рис. 143

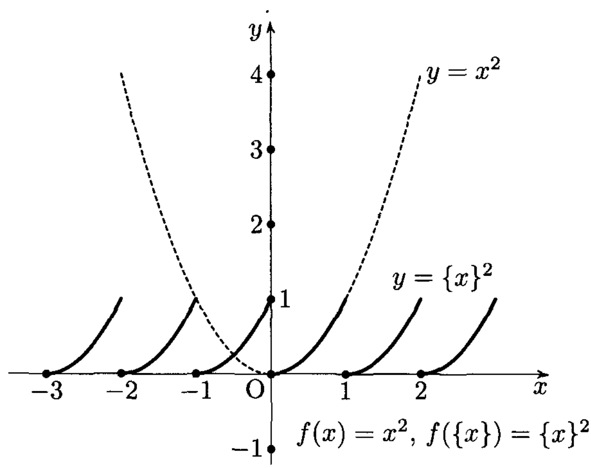


Рис. 144

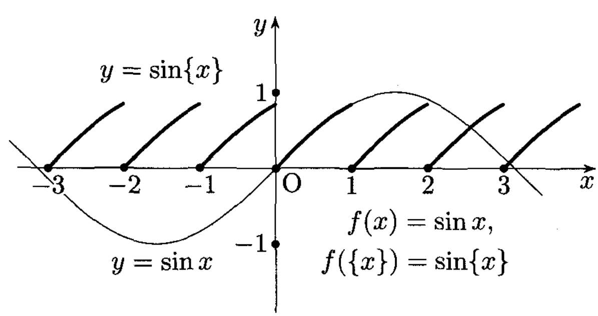


Рис. 145

число, график функции $f(\{x\})$ имеет один и тот же вид; поэтому для построения графика функции $f(\{x\})$ достаточно его построить в полуинтервале $[0, 1)$. Очевидно, функция $f(\{x\})$ периодическая, ее период равен единице.

На рис. 144 и 145 представлены графики функций $y = \{x\}^2$ и $y = \sin\{x\}$.

Упражнения

Постройте графики функций.

75. $y = \{2^x\}$.

76. $y = \{\arccos x\}$.

77. $y = \{x^2 - 2x - 1\}$.

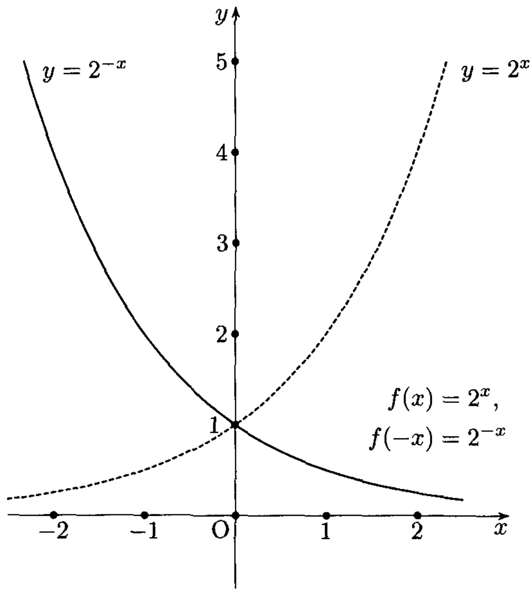
78. $y = 2^{\{x\}}$.

79. $y = \arccos\{x\}$.

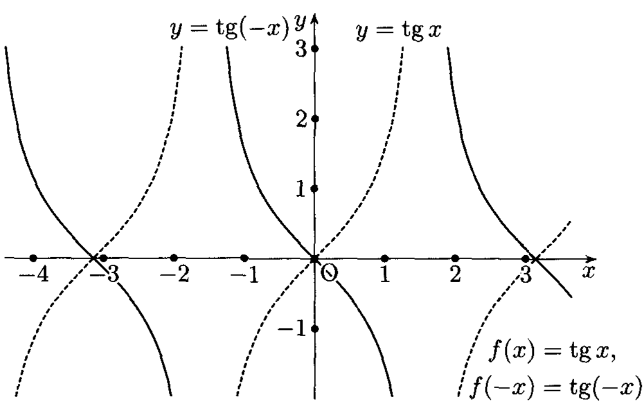
80. $y = \{x\}^2 - 2\{x\} - 1$.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

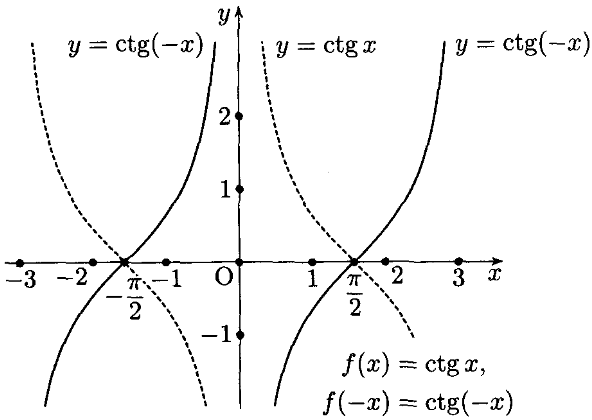
1.



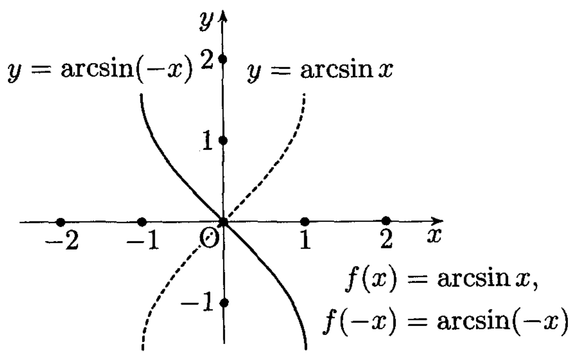
2.



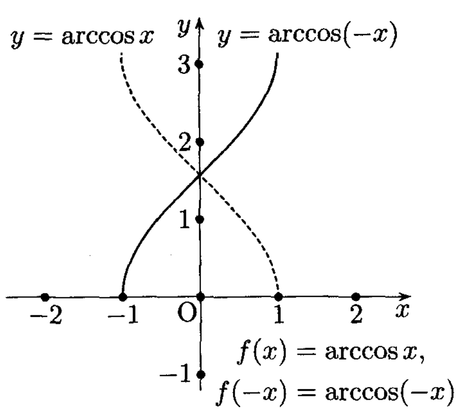
3.


y
y = ctg(−x)
y = ctg x
y = ctg(−x)
2
1
−3
−2
−π/2
−1
O
1
π/2
2
3
x
−1
f(x) = ctg x,
f(−x) = ctg(−x)

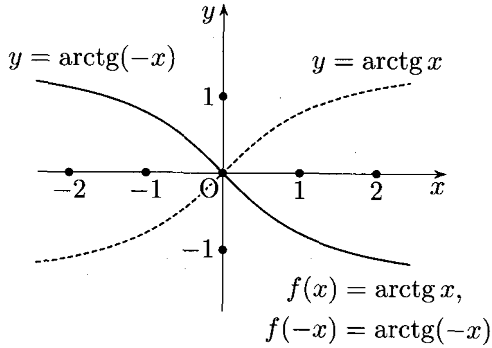
4.


y
y = arcsin(−x)
2
y = arcsin x
1
−2
−1
O
1
2
x
−1
f(x) = arcsin x,
f(−x) = arcsin(−x)

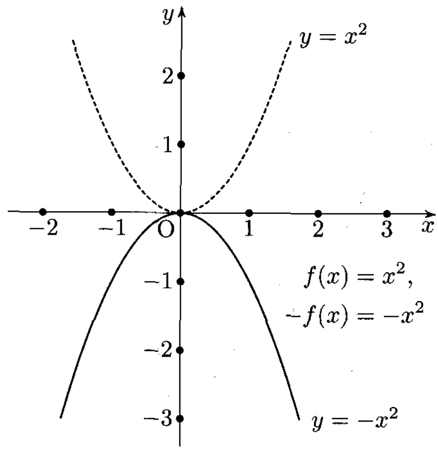
5.


y = arccos x
y
y = arccos(−x)
3
2
1
−2
−1
O
1
2
x
−1
f(x) = arccos x,
f(−x) = arccos(−x)

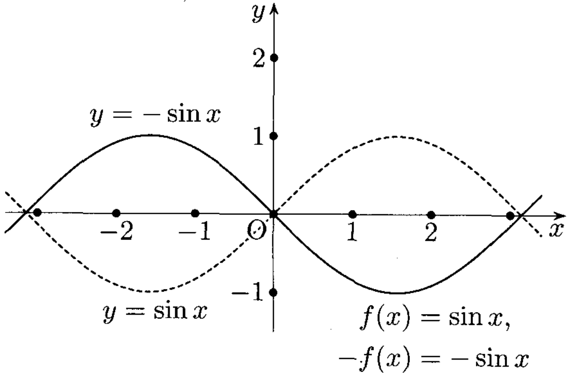
6.


$y = \operatorname{arctg}(-x)$
$y = \operatorname{arctg} x$
y
x
O
1
-1
-2
2
$f(x) = \operatorname{arctg} x,$
$f(-x) = \operatorname{arctg}(-x)$

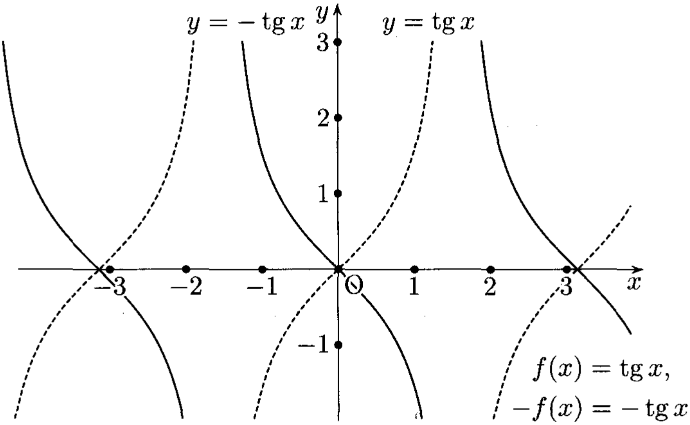
7.


$y = x^2$
y
x
O
$f(x) = x^2,$
$-f(x) = -x^2$
$y = -x^2$

8.

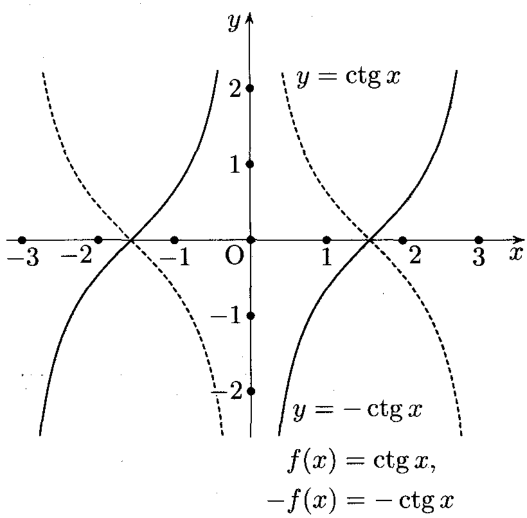

$y = -\sin x$
$y = \sin x$
y
x
O
$f(x) = \sin x,$
$-f(x) = -\sin x$

9.



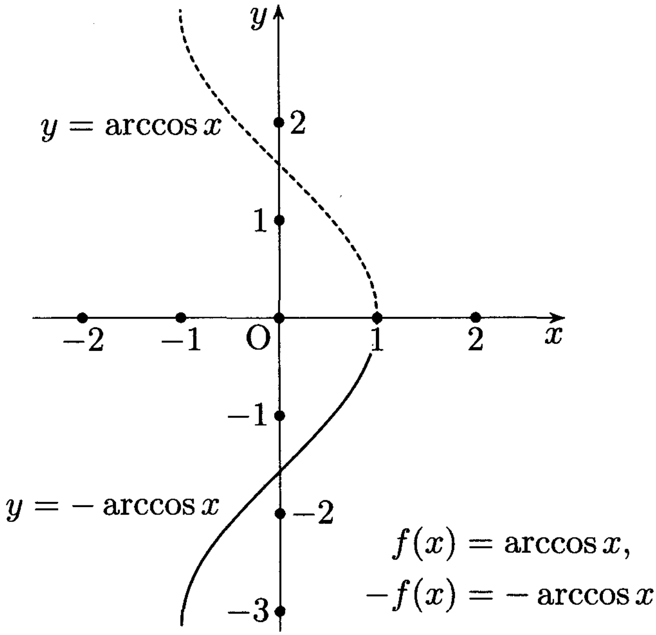
$y = -\operatorname{tg} x$
y
$y = \operatorname{tg} x$
3
2
1
-3
-2
-1
O
1
2
3
x
-1
$f(x) = \operatorname{tg} x,$
$-f(x) = -\operatorname{tg} x$

10.



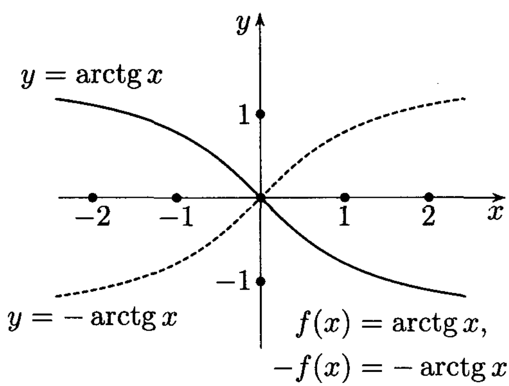
y
$y = \operatorname{ctg} x$
2
1
-3
-2
-1
O
1
2
3
x
-1
-2
$y = -\operatorname{ctg} x$
$f(x) = \operatorname{ctg} x,$
$-f(x) = -\operatorname{ctg} x$

11.



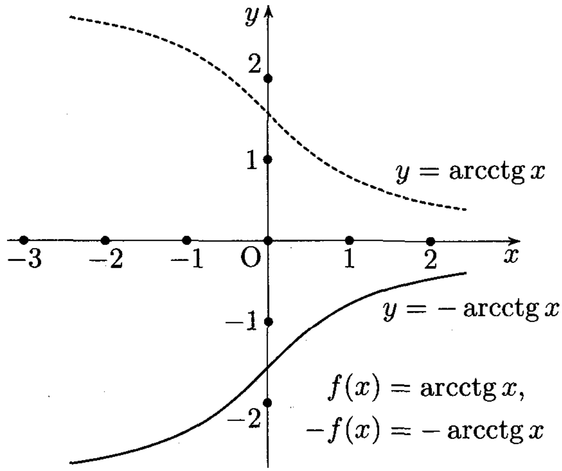
y
$y = \arccos x$
2
1
-2
-1
O
1
2
x
-1
$y = -\arccos x$
-2
$f(x) = \arccos x,$
$-f(x) = -\arccos x$
-3

12.

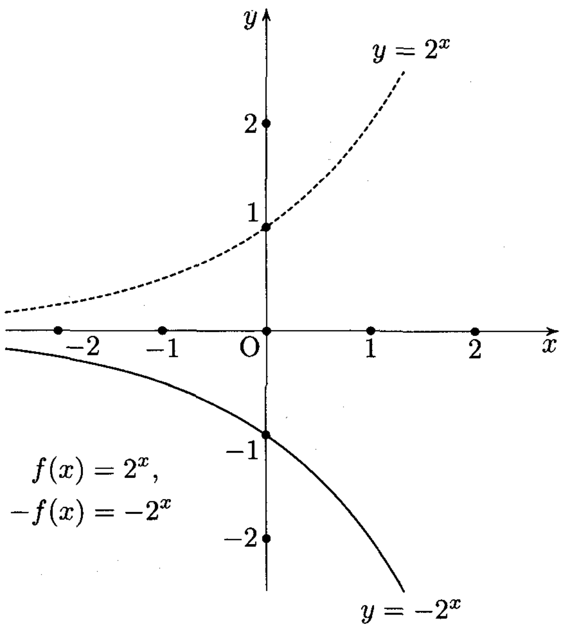


y
$y = \operatorname{arctg} x$
1
-2
-1
1
2
x
-1
$y = -\operatorname{arctg} x$
$f(x) = \operatorname{arctg} x,$
$-f(x) = -\operatorname{arctg} x$

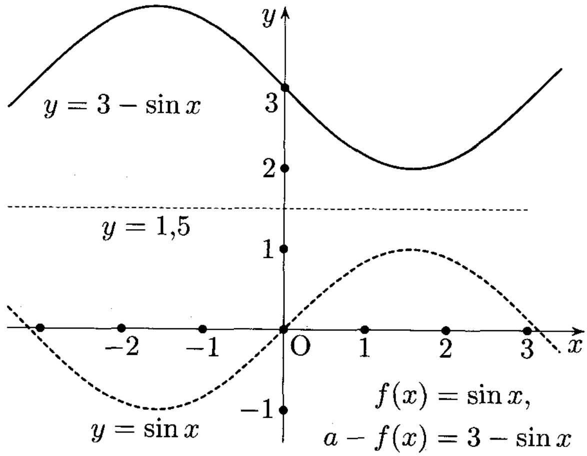
13.


y
2
1
O
−3
−2
−1
1
2
x
−1
−2
y = arcctg x
y = − arcctg x
f(x) = arcctg x,
−f(x) = − arcctg x

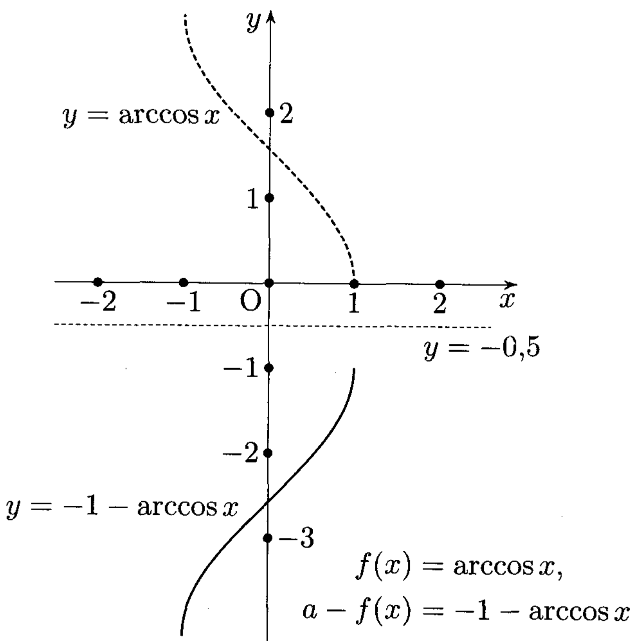
14.


y
y = 2^x
2
1
O
−2
−1
1
2
x
−1
−2
f(x) = 2^x,
−f(x) = −2^x
y = −2^x

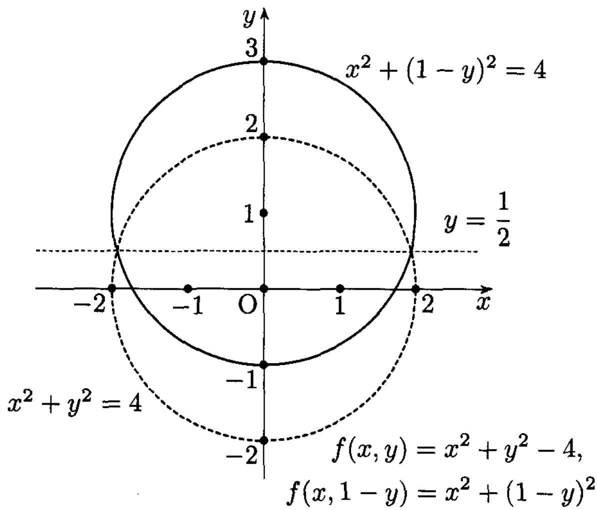
15.


y
x
O
$y = 3 - \sin x$
$y = 1{,}5$
$y = \sin x$
$f(x) = \sin x,$
$a - f(x) = 3 - \sin x$
3
2
1
−1
−2
−1
1
2
3

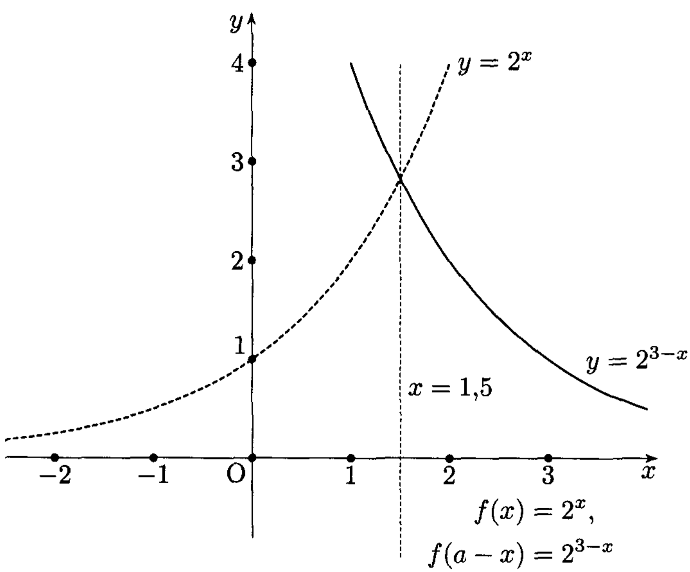
16.


y
x
O
$y = \arccos x$
$y = -0{,}5$
$y = -1 - \arccos x$
$f(x) = \arccos x,$
$a - f(x) = -1 - \arccos x$
2
1
−1
−2
−3
−2
−1
1
2

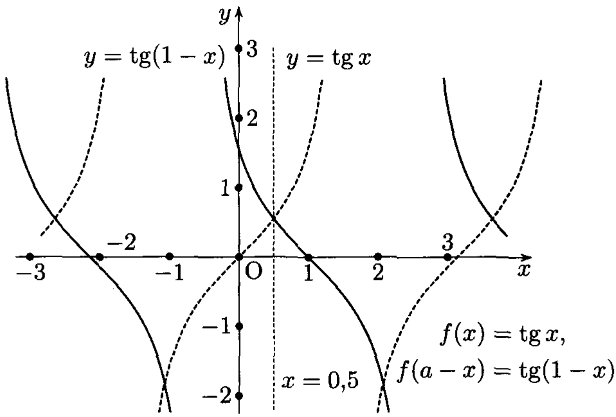
17.


y
3
2
1
-2
-1
O
1
2
x
-1
-2
$x^2 + (1-y)^2 = 4$
$y = \frac{1}{2}$
$x^2 + y^2 = 4$
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4,$
$f(x, 1-y) = x^2 + (1-y)^2$

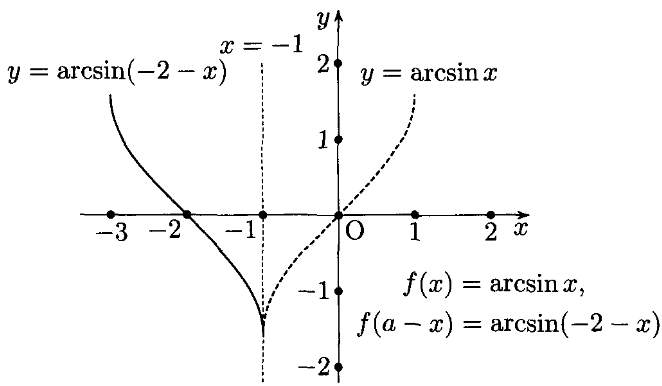
18.


y
4
3
2
1
-2
-1
O
1
2
3
x
$y = 2^x$
$y = 2^{3-x}$
$x = 1{,}5$
$f(x) = 2^x,$
$f(a-x) = 2^{3-x}$

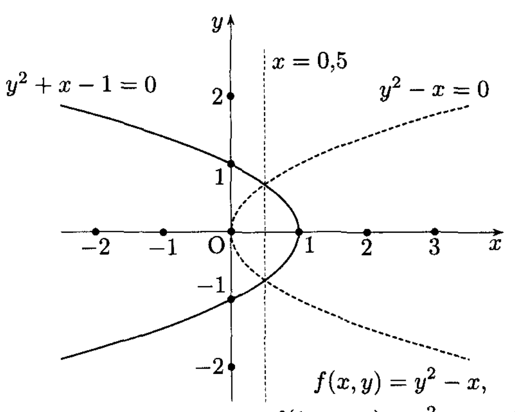
19.


y
$y = \mathrm{tg}(1-x)$
$y = \mathrm{tg}\,x$
3
2
1
-2
3
-3
-1
O
1
2
x
-1
-2
$x = 0{,}5$
$f(x) = \mathrm{tg}\,x,$
$f(a-x) = \mathrm{tg}(1-x)$

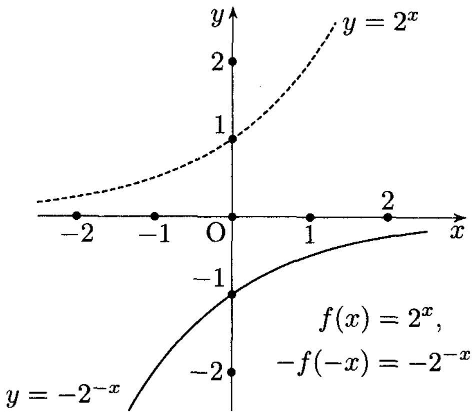
20.


y
$x = -1$
$y = \arcsin(-2-x)$
2
$y = \arcsin x$
1
-3
-2
-1
O
1
2
x
-1
$f(x) = \arcsin x,$
$f(a-x) = \arcsin(-2-x)$
-2

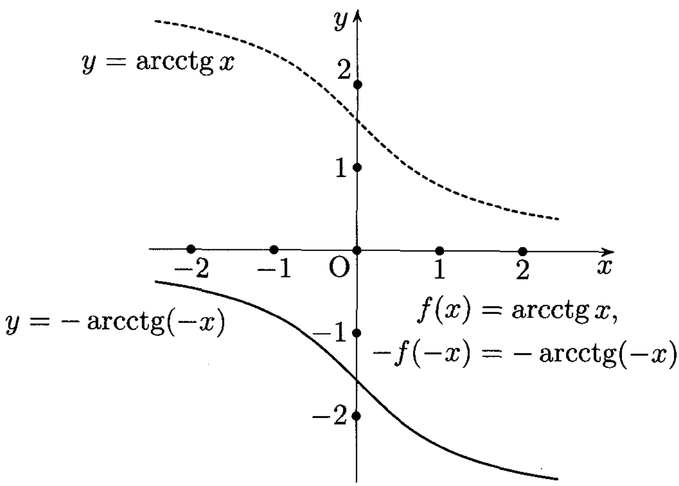
21.


y
$x = 0{,}5$
$y^2 + x - 1 = 0$
2
$y^2 - x = 0$
1
-2
-1
O
1
2
3
x
-1
-2
$f(x, y) = y^2 - x,$
$f(1-x, y) = y^2 + x - 1$

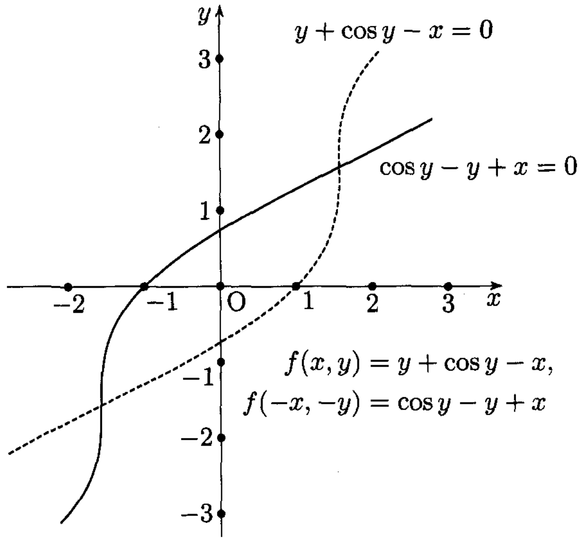
22.


y
$y = 2^x$
2
1
-2
-1
O
1
2
x
-1
$f(x) = 2^x,$
$-f(-x) = -2^{-x}$
-2
$y = -2^{-x}$

23.

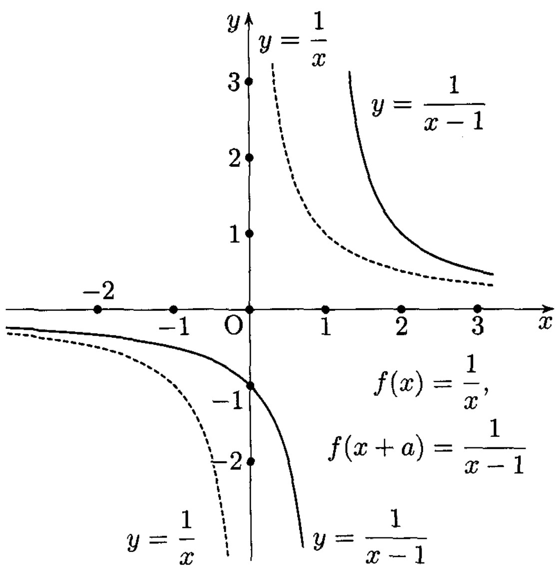

y
$y = \operatorname{arcctg} x$
2
1
-2
-1
O
1
2
x
$f(x) = \operatorname{arcctg} x,$
$y = -\operatorname{arcctg}(-x)$
-1
$-f(-x) = -\operatorname{arcctg}(-x)$
-2

24.



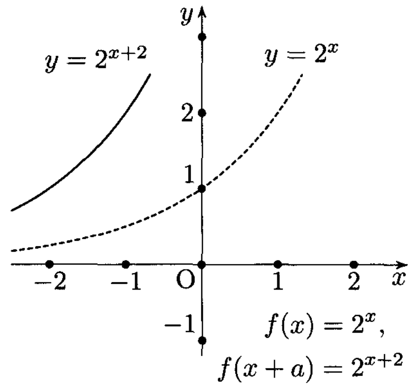
y
$y + \cos y - x = 0$
$\cos y - y + x = 0$
3
2
1
-2
-1
O
1
2
3
x
-1
-2
-3
$f(x, y) = y + \cos y - x,$
$f(-x, -y) = \cos y - y + x$

25.



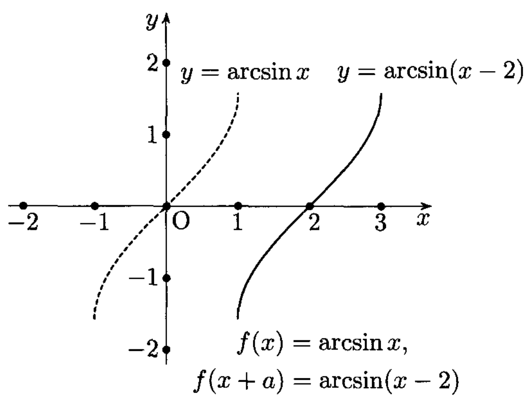
y
$y = \frac{1}{x}$
$y = \frac{1}{x-1}$
3
2
1
-2
-1
O
1
2
3
x
-1
-2
$f(x) = \frac{1}{x},$
$f(x+a) = \frac{1}{x-1}$
$y = \frac{1}{x}$
$y = \frac{1}{x-1}$

26.



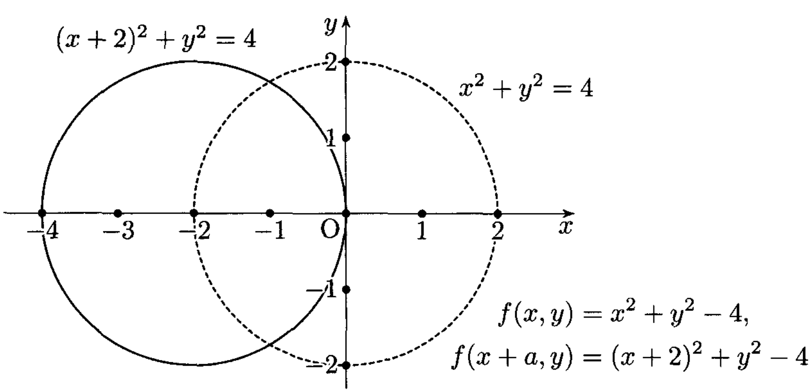
y
$y = 2^{x+2}$
$y = 2^x$
2
1
-2
-1
O
1
2
x
-1
$f(x) = 2^x$,
$f(x+a) = 2^{x+2}$

27.



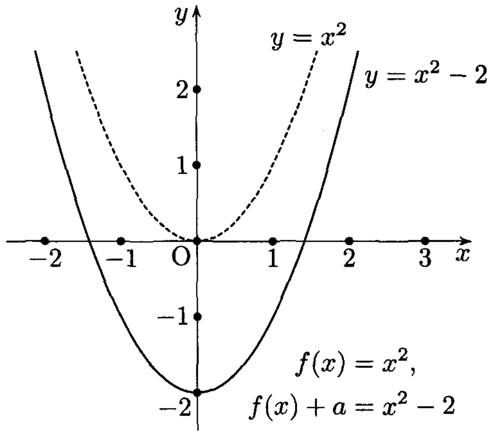
y
2
$y = \arcsin x$
$y = \arcsin(x-2)$
1
-2
-1
O
1
2
3
x
-1
-2
$f(x) = \arcsin x$,
$f(x+a) = \arcsin(x-2)$

28.

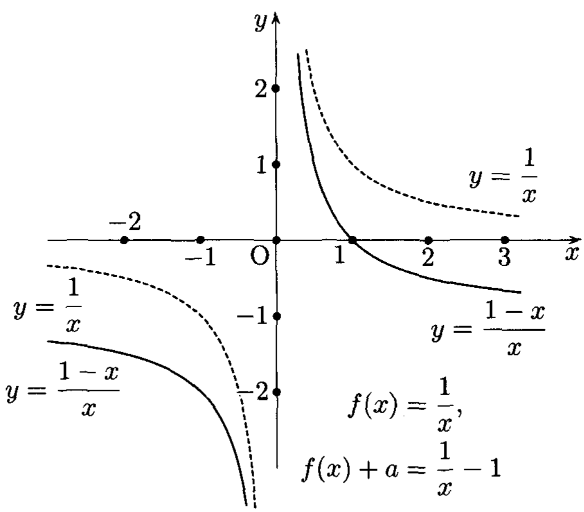


y
$(x+2)^2 + y^2 = 4$
2
$x^2 + y^2 = 4$
1
-4
-3
-2
-1
O
1
2
x
-1
-2
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$,
$f(x+a, y) = (x+2)^2 + y^2 - 4$

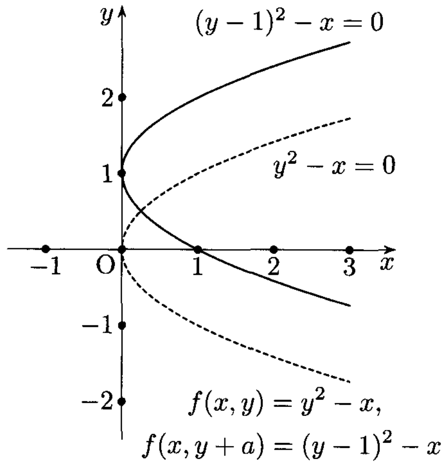
29.


y
$y = x^2$
$y = x^2 - 2$
2
1
-2
-1
O
1
2
3
x
-1
-2
$f(x) = x^2,$
$f(x) + a = x^2 - 2$

30.

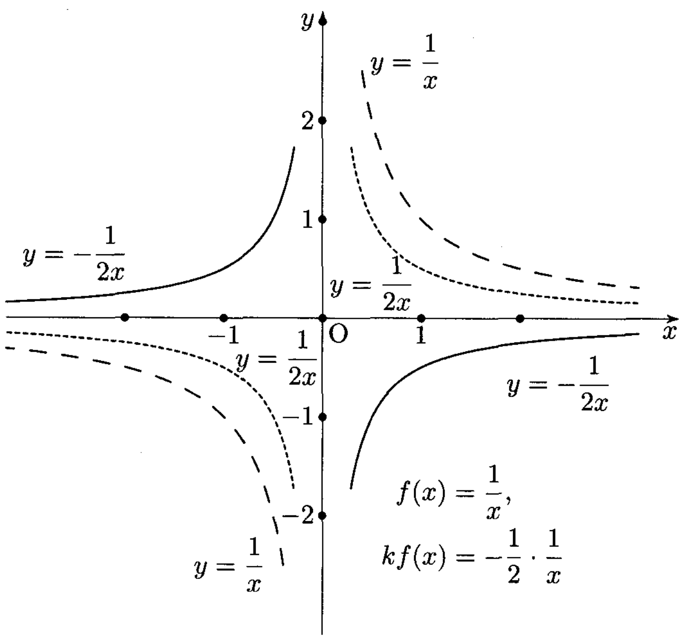

y
2
1
$y = \frac{1}{x}$
-2
-1
O
1
2
3
x
$y = \frac{1}{x}$
-1
$y = \frac{1-x}{x}$
$y = \frac{1-x}{x}$
-2
$f(x) = \frac{1}{x},$
$f(x) + a = \frac{1}{x} - 1$

31.



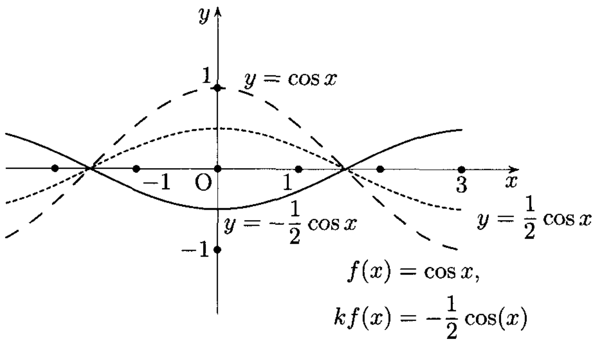
y
$(y-1)^2 - x = 0$
2
1
$y^2 - x = 0$
-1
O
1
2
3
x
-1
-2
$f(x, y) = y^2 - x,$
$f(x, y+a) = (y-1)^2 - x$

32.



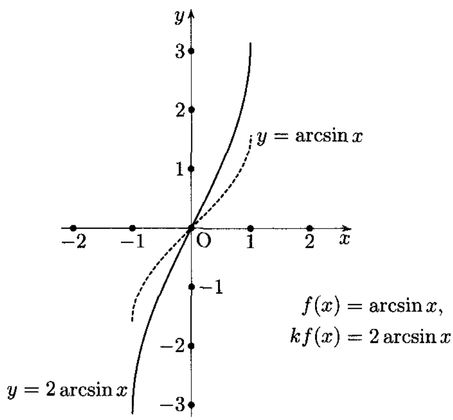
y
$y = \frac{1}{x}$
2
1
$y = -\frac{1}{2x}$
$y = \frac{1}{2x}$
-1
O
1
x
$y = \frac{1}{2x}$
$y = -\frac{1}{2x}$
-1
$f(x) = \frac{1}{x},$
-2
$kf(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$
$y = \frac{1}{x}$

33.



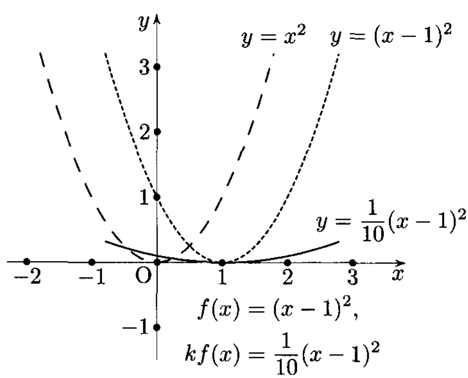
y
1
y = cos x
−1
O
1
3
x
y = −1/2 cos x
y = 1/2 cos x
−1
f(x) = cos x,
kf(x) = −1/2 cos(x)

34.



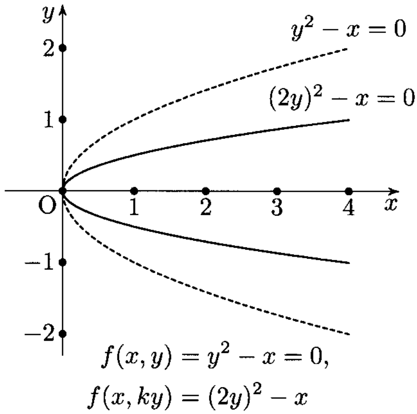
y
3
2
1
y = arcsin x
−2
−1
O
1
2
x
−1
f(x) = arcsin x,
kf(x) = 2 arcsin x
−2
y = 2 arcsin x
−3

35.

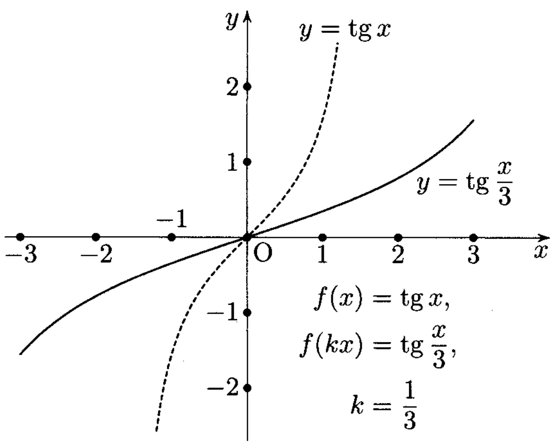


y
y = x²
y = (x − 1)²
3
2
1
y = 1/10 (x − 1)²
−2
−1
O
1
2
3
x
f(x) = (x − 1)²,
−1
kf(x) = 1/10 (x − 1)²

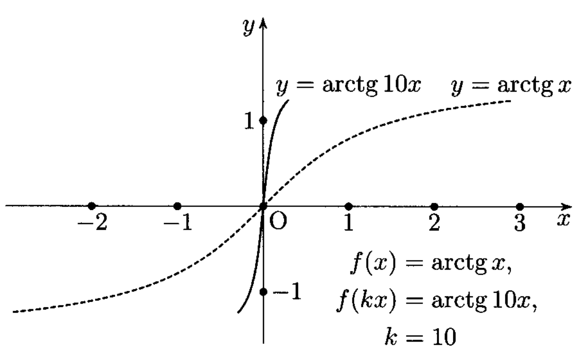
36.


y
2
1
O
1
2
3
4
x
−1
−2
$y^2 - x = 0$
$(2y)^2 - x = 0$
$f(x, y) = y^2 - x = 0,$
$f(x, ky) = (2y)^2 - x$

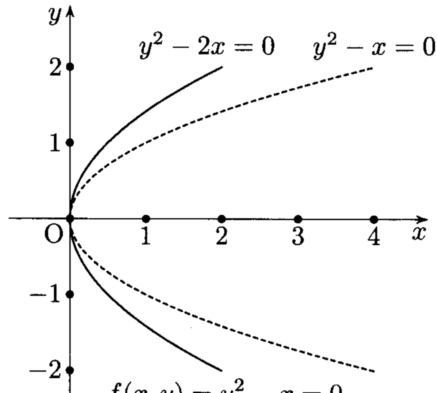
37.


y
$y = \operatorname{tg} x$
2
1
$y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$
−1
−3
−2
O
1
2
3
x
−1
−2
$f(x) = \operatorname{tg} x,$
$f(kx) = \operatorname{tg} \frac{x}{3},$
$k = \frac{1}{3}$

38.


y
$y = \operatorname{arctg} 10x$
$y = \operatorname{arctg} x$
1
−2
−1
O
1
2
3
x
−1
$f(x) = \operatorname{arctg} x,$
$f(kx) = \operatorname{arctg} 10x,$
$k = 10$

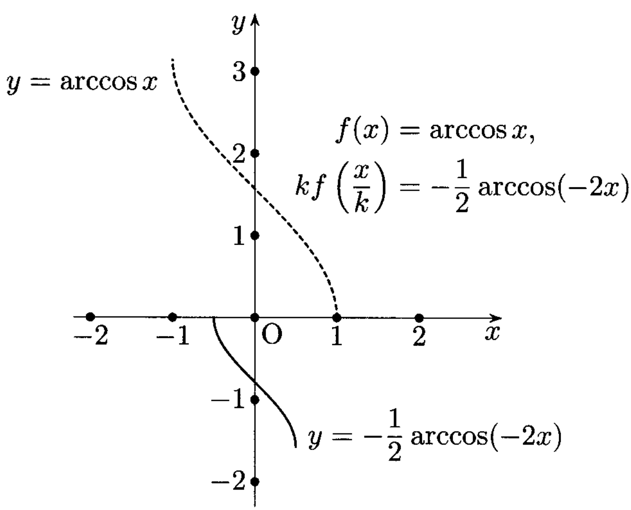
39.



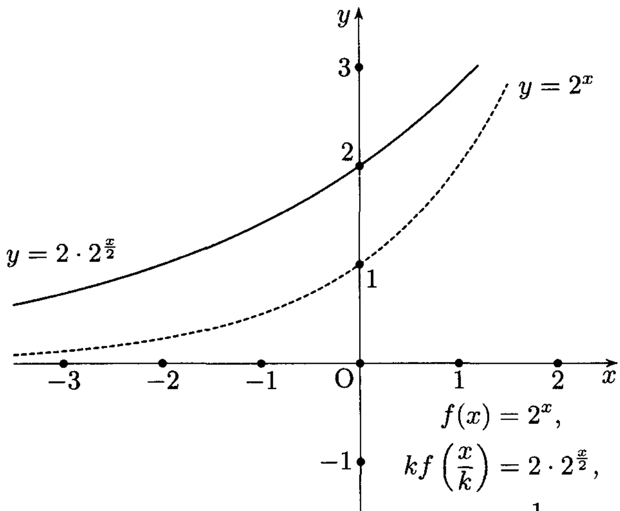
$f(x, y) = y^2 - x = 0,$

$f(kx, y) = y^2 - 2x = 0$

40.

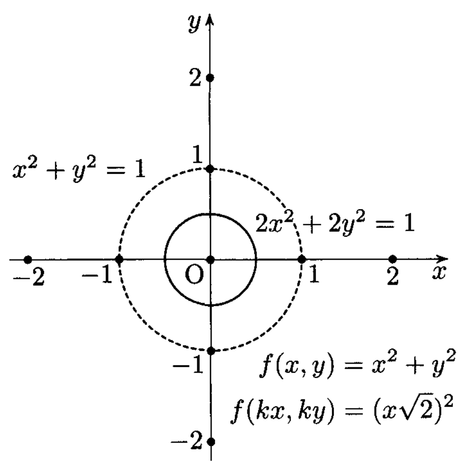


41.



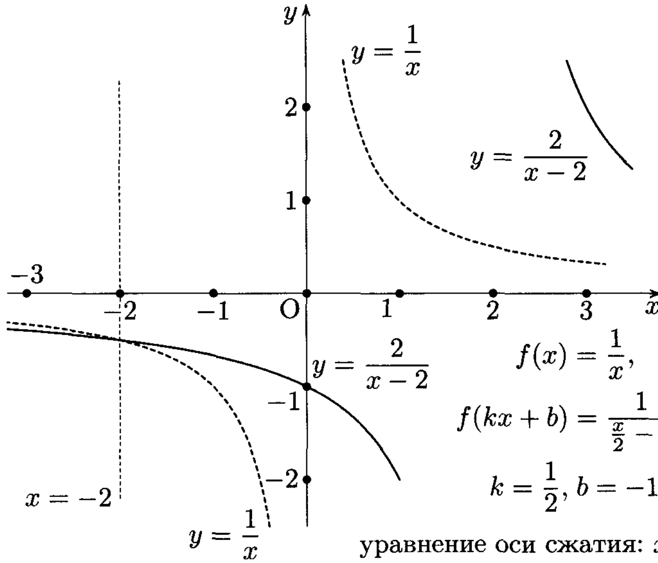
$$f(x) = 2^x,$$
$$kf\left(\frac{x}{k}\right) = 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}},$$
$$k = \frac{1}{2}$$

42.



$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$
$$f(kx, ky) = (x\sqrt{2})^2 + (y\sqrt{2})^2 - 1$$

43.



$$f(x) = \frac{1}{x},$$

$$f(kx+b) = \frac{1}{\frac{x}{2} - 1},$$

$$k = \frac{1}{2}, \ b = -1,$$

уравнение оси сжатия: $x = -2$

44.

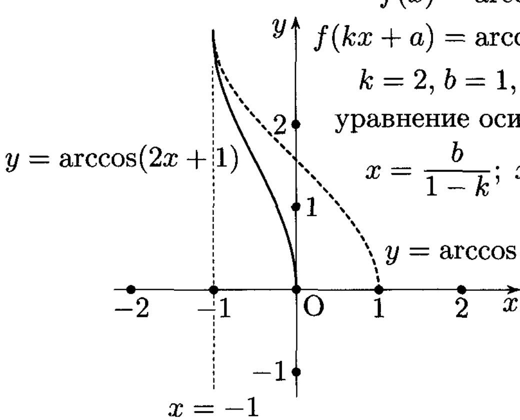
$$f(x) = \arccos x,$$

$$f(kx+a) = \arccos(2x+1),$$

$$k = 2, \ b = 1,$$

уравнение оси сжатия:

$$x = \frac{b}{1-k}; \ x = -1$$

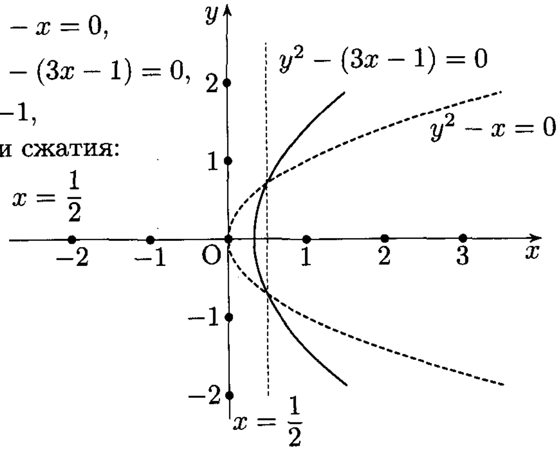


45.

$$f(x, y) = y^2 - x = 0,$$
$$f(kx + b, y) = y^2 - (3x - 1) = 0,$$
$$k = 3, b = -1,$$

уравнение оси сжатия:

$$x = \frac{b}{1-k};\ x = \frac{1}{2}$$

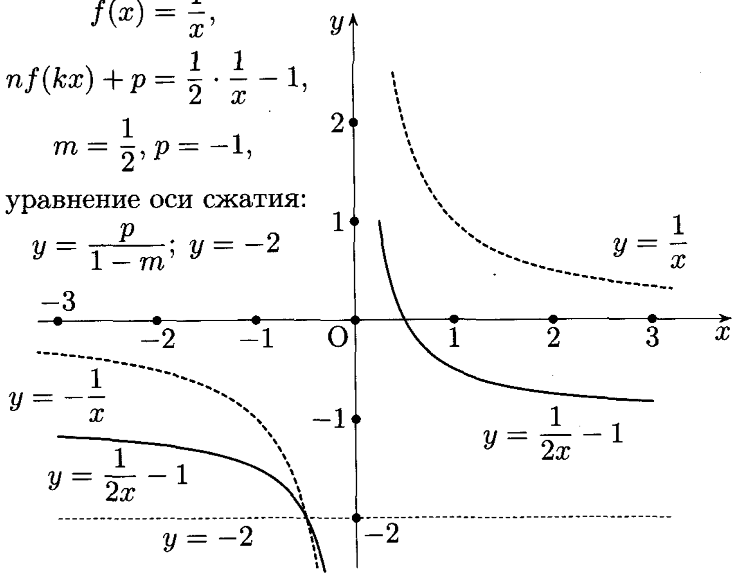


46.

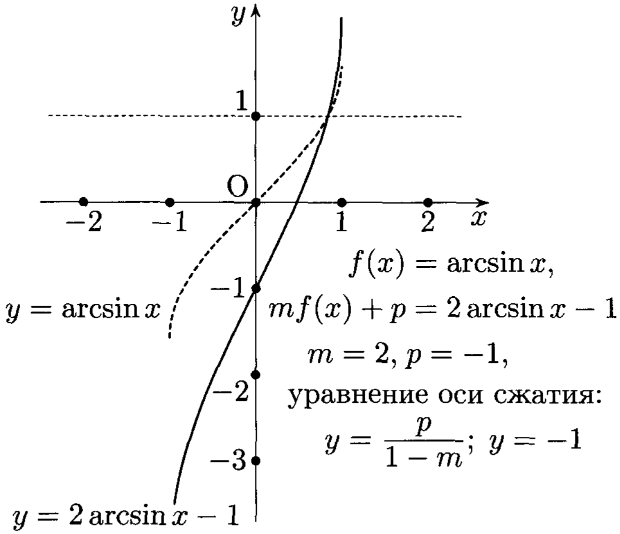
$$f(x) = \frac{1}{x},$$
$$nf(kx) + p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - 1,$$
$$m = \frac{1}{2}, p = -1,$$

уравнение оси сжатия:

$$y = \frac{p}{1-m};\ y = -2$$

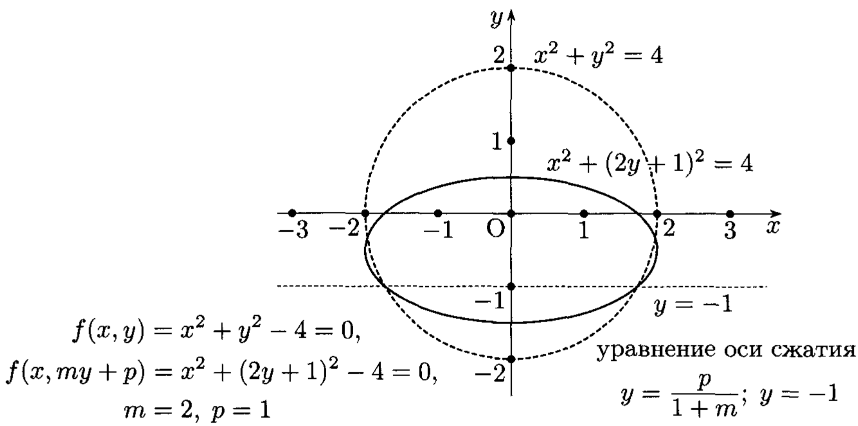


47.



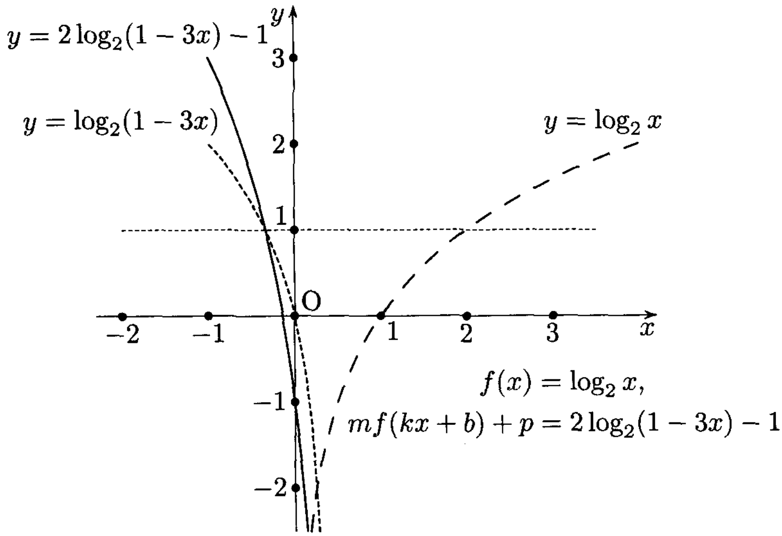
y
1
O
-2
-1
1
2
x
-1
-2
-3
$y = \arcsin x$
$y = 2\arcsin x - 1$
$f(x) = \arcsin x,$
$mf(x) + p = 2\arcsin x - 1,$
$m = 2, p = -1,$
уравнение оси сжатия:
$y = \dfrac{p}{1-m};\ y = -1$

48.

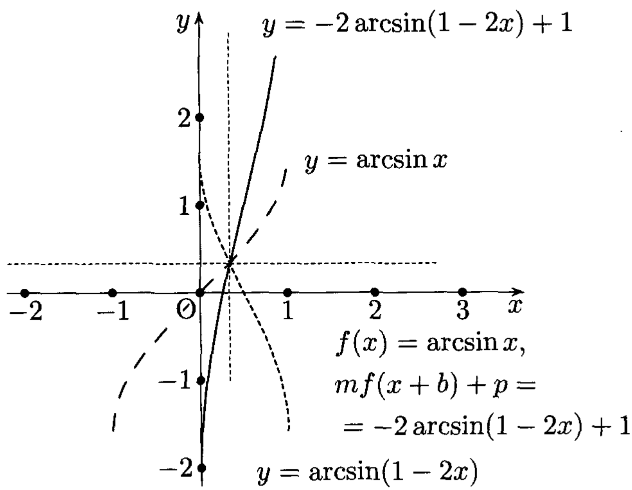


y
2
$x^2 + y^2 = 4$
1
$x^2 + (2y + 1)^2 = 4$
-3
-2
-1
O
1
2
3
x
-1
$y = -1$
-2
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0,$
$f(x, my + p) = x^2 + (2y + 1)^2 - 4 = 0,$
$m = 2,\ p = 1$
уравнение оси сжатия:
$y = \dfrac{p}{1+m};\ y = -1$

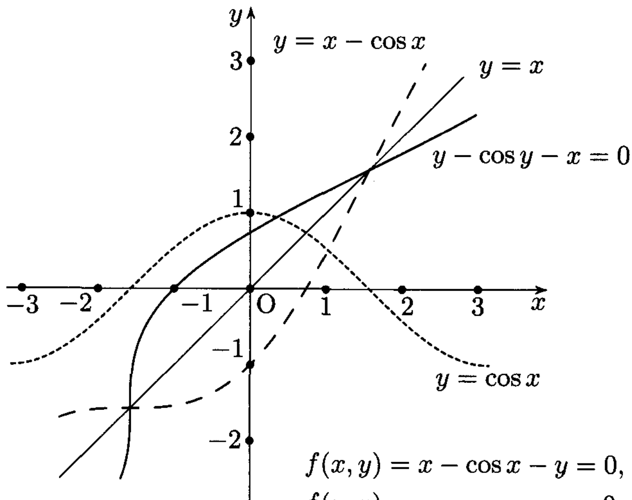
49.


$y = 2\log_2(1-3x) - 1$
$y = \log_2(1-3x)$
$y = \log_2 x$
y
x
O
3
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
3
$f(x) = \log_2 x,$
$mf(kx+b) + p = 2\log_2(1-3x) - 1$

50.

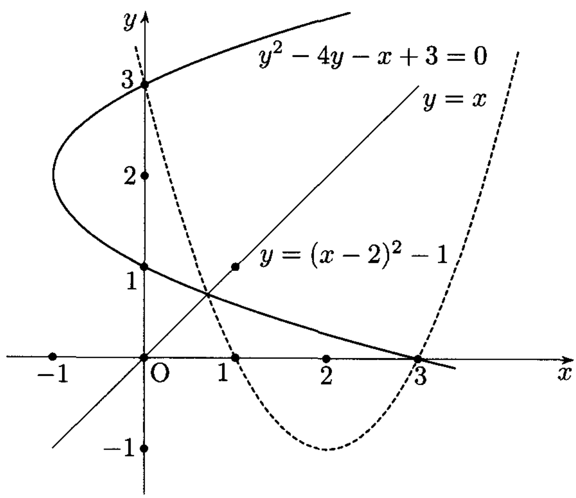

$y = -2\arcsin(1-2x) + 1$
$y = \arcsin x$
$y = \arcsin(1-2x)$
y
x
O
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
3
$f(x) = \arcsin x,$
$mf(x+b) + p =$
$= -2\arcsin(1-2x) + 1$

51.



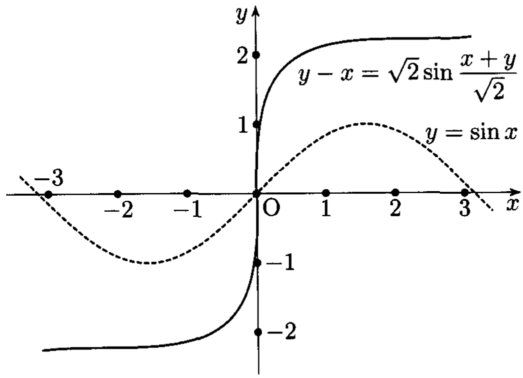
$$f(x, y) = x - \cos x - y = 0,$$
$$f(y, x) = y - \cos y - x = 0$$

52.

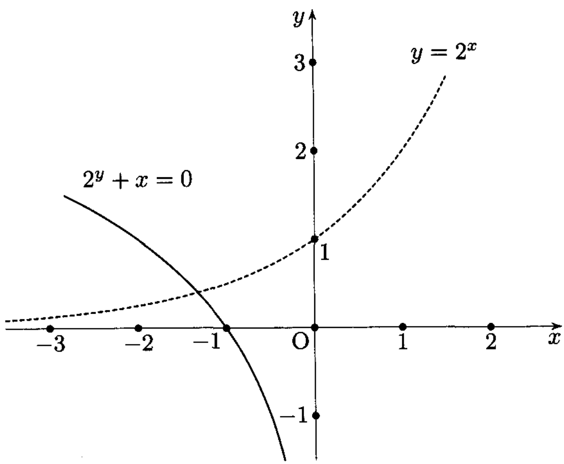


$$f(x, y) = x^2 - 4x - y + 3 = (x-2)^2 - 1 - y = 0,$$
$$f(y, x) = (y-2)^2 - 1 - x = 0$$

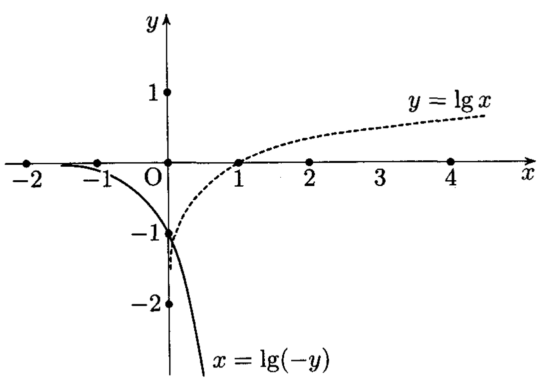
53.


y
2
1
−3
−2
−1
O
1
2
3
x
−1
−2
$y - x = \sqrt{2}\sin\frac{x+y}{\sqrt{2}}$
$y = \sin x$

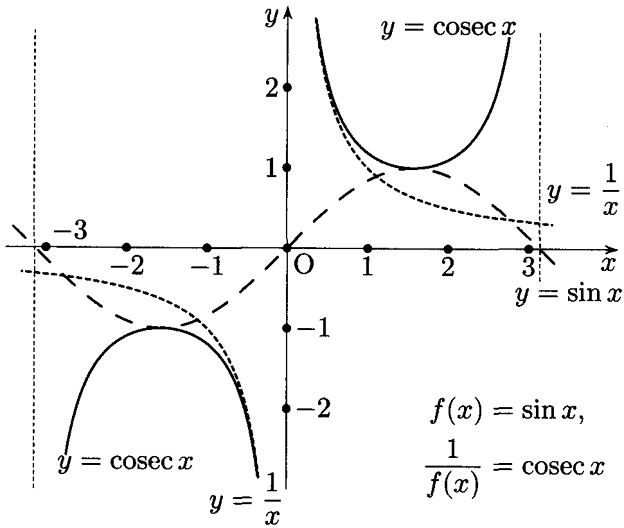
54.


y
3
2
1
$y = 2^x$
$2^y + x = 0$
−3
−2
−1
O
1
2
x
−1

55.

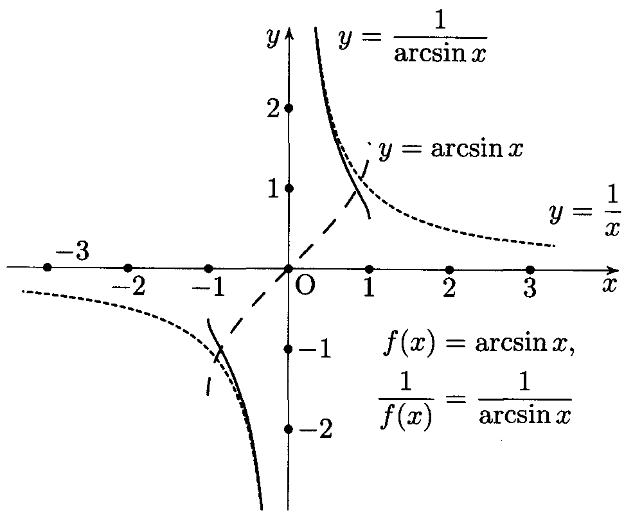

y
1
$y = \lg x$
−2
−1
O
1
2
3
4
x
−1
−2
$x = \lg(-y)$

56.



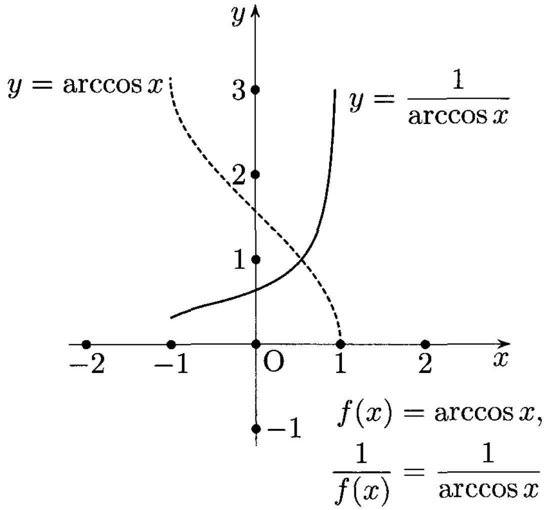
y
$y = \operatorname{cosec} x$
2
1
-3
-2
-1
O
1
2
3
x
$y = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$
-1
-2
$f(x) = \sin x,$
$\frac{1}{f(x)} = \operatorname{cosec} x$
$y = \operatorname{cosec} x$
$y = \frac{1}{x}$

57.

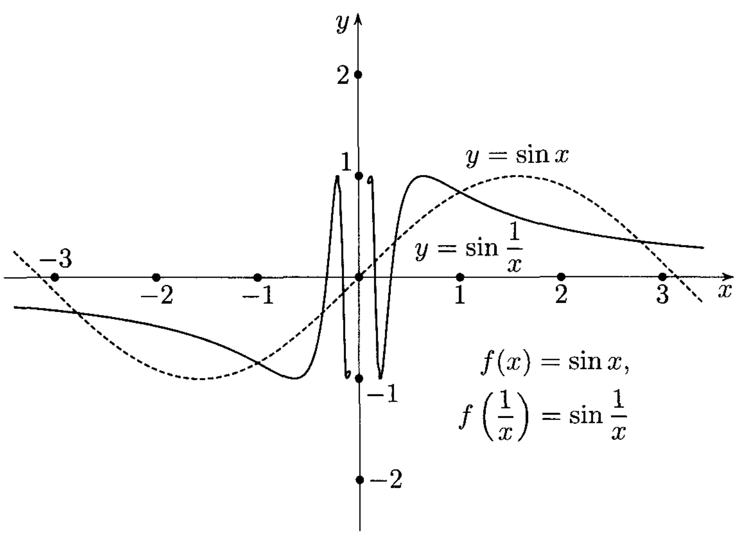


y
$y = \frac{1}{\arcsin x}$
2
$y = \arcsin x$
1
$y = \frac{1}{x}$
-3
-2
-1
O
1
2
3
x
-1
$f(x) = \arcsin x,$
$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\arcsin x}$
-2

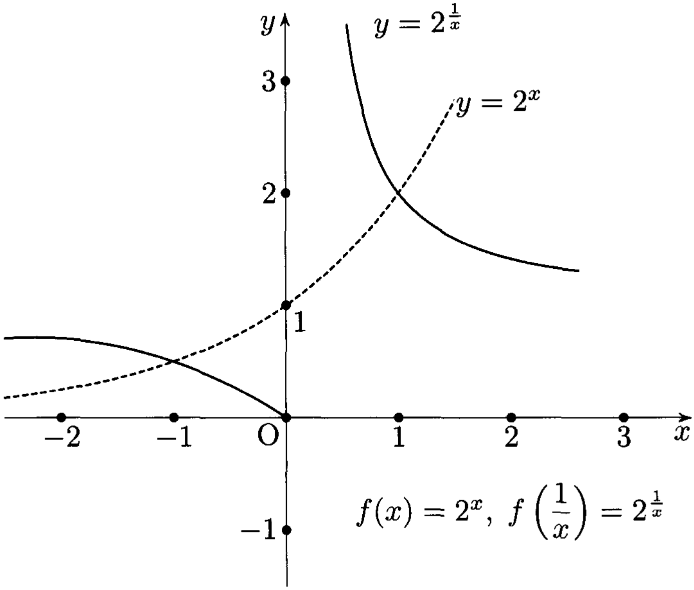
58.


y
y = arccos x
y = 1/(arccos x)
3
2
1
−2
−1
O
1
2
x
−1
f(x) = arccos x,
1/f(x) = 1/(arccos x)

59.

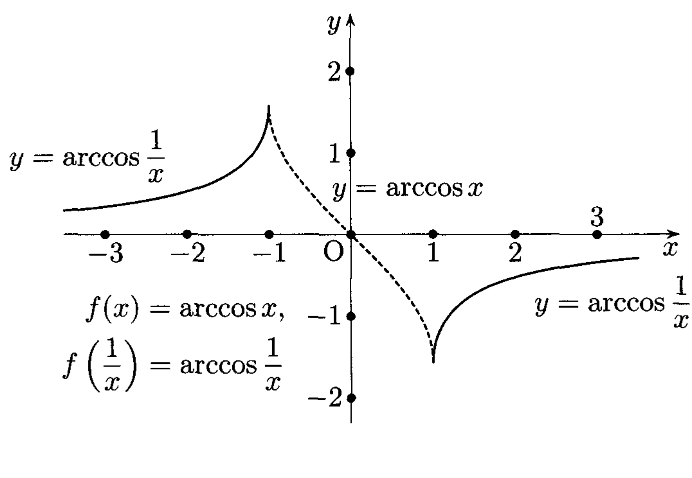

y
2
1
y = sin x
y = sin 1/x
−3
−2
−1
1
2
3
x
−1
−2
f(x) = sin x,
f(1/x) = sin 1/x

60.



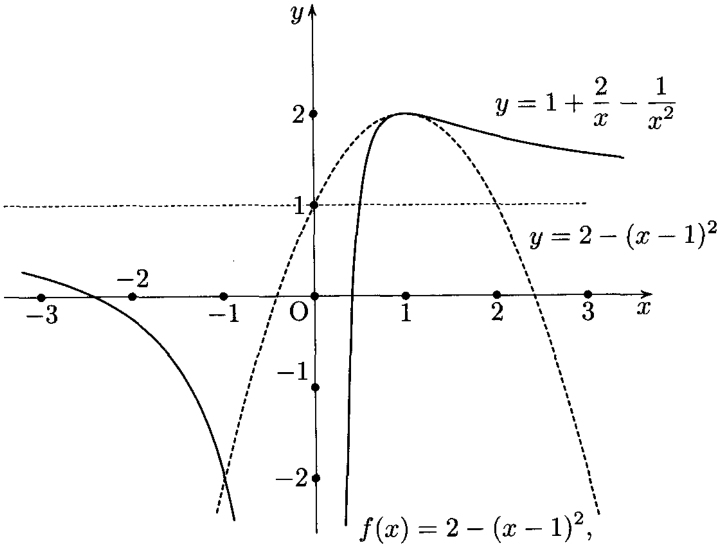
$y = 2^{\frac{1}{x}}$
$y = 2^x$
y
3
2
1
−1
−2
−1
O
1
2
3
x
$f(x) = 2^x,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^{\frac{1}{x}}$

61.



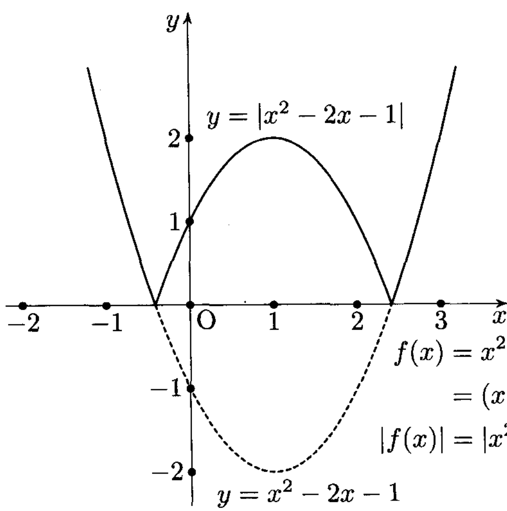
y
2
1
$y = \arccos\frac{1}{x}$
$y = \arccos x$
−3
−2
−1
O
1
2
3
x
−1
−2
$f(x) = \arccos x,$
$f\left(\frac{1}{x}\right) = \arccos\frac{1}{x}$
$y = \arccos\frac{1}{x}$

62.



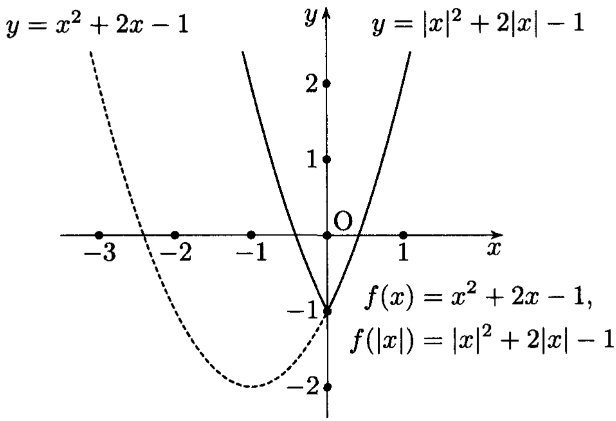
$$f(x) = 2 - (x-1)^2,$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

63.

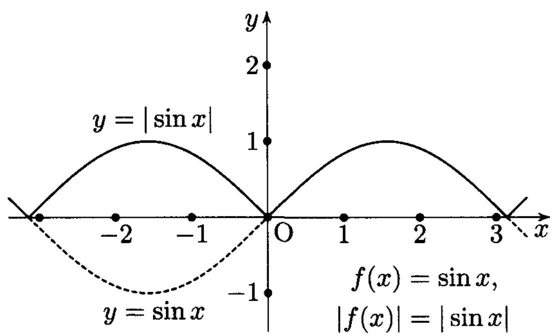


$$f(x) = x^2 + 2x - 1 =$$
$$= (x-1)^2 - 2,$$
$$|f(x)| = |x^2 - 2x - 1|$$

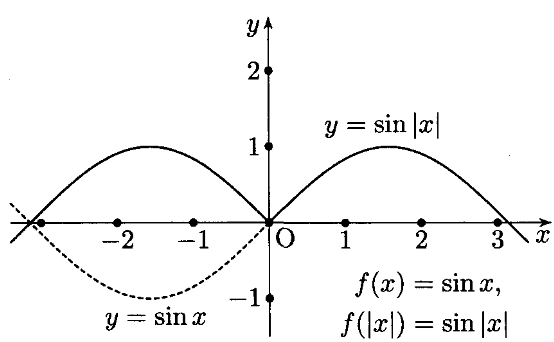
64.


$y = x^2 + 2x - 1$
$y = |x|^2 + 2|x| - 1$
y
2
1
O
-3
-2
-1
1
x
-1
-2
$f(x) = x^2 + 2x - 1,$
$f(|x|) = |x|^2 + 2|x| - 1$

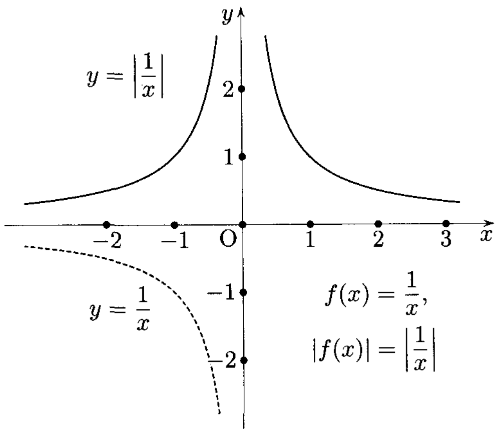
65.


y
2
$y = |\sin x|$
1
-2
-1
O
1
2
3
x
-1
$y = \sin x$
$f(x) = \sin x,$
$|f(x)| = |\sin x|$

66.

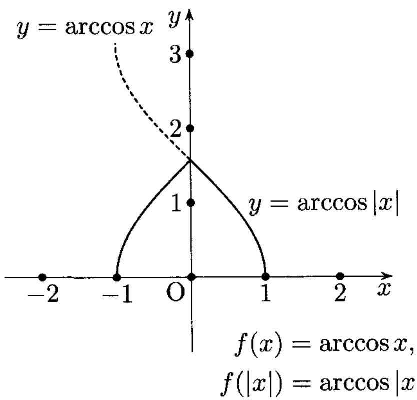

y
2
$y = \sin |x|$
1
-2
-1
O
1
2
3
x
-1
$y = \sin x$
$f(x) = \sin x,$
$f(|x|) = \sin |x|$

67.



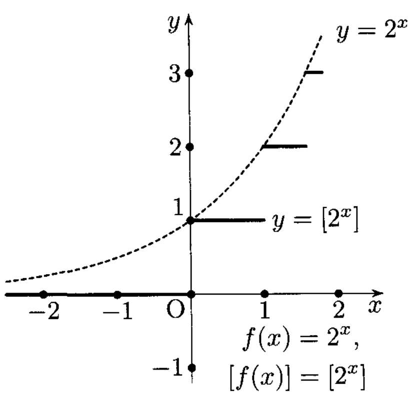
y
$y = \left|\frac{1}{x}\right|$
2
1
-2
-1
O
1
2
3
x
$y = \frac{1}{x}$
-1
-2
$f(x) = \frac{1}{x}$,
$|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right|$

68.



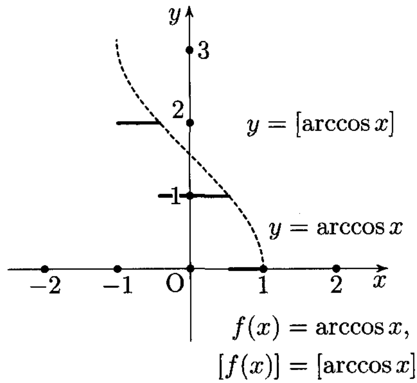
$y = \arccos x$
y
3
2
1
$y = \arccos|x|$
-2
-1
O
1
2
x
$f(x) = \arccos x$,
$f(|x|) = \arccos|x|$

69.

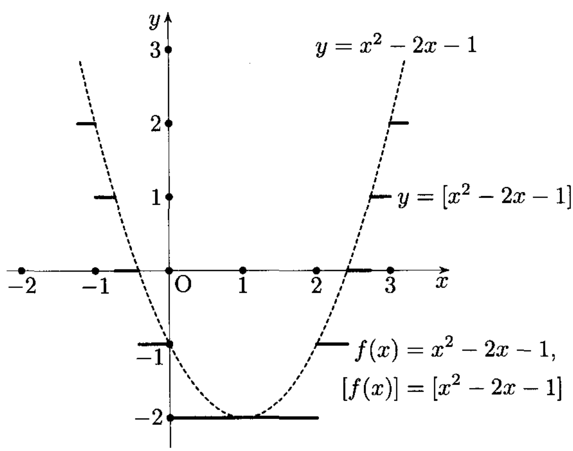


y
$y = 2^x$
3
2
1
$y = [2^x]$
-2
-1
O
1
2
x
$f(x) = 2^x$,
$[f(x)] = [2^x]$
-1

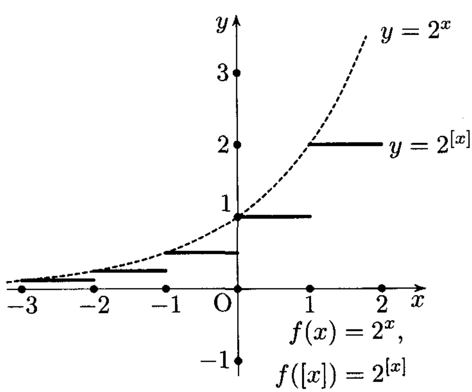
70.


y
3
2
1
$y = [\arccos x]$
$y = \arccos x$
−2
−1
O
1
2
x
$f(x) = \arccos x,$
$[f(x)] = [\arccos x]$

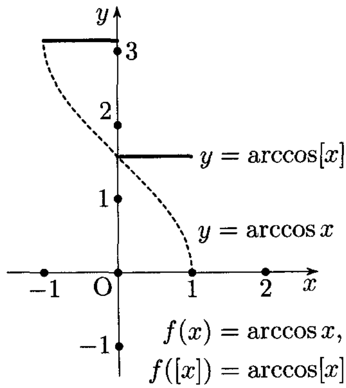
71.


y
3
2
1
−1
−2
$y = x^2 - 2x - 1$
$y = [x^2 - 2x - 1]$
−2
−1
O
1
2
3
x
$f(x) = x^2 - 2x - 1,$
$[f(x)] = [x^2 - 2x - 1]$

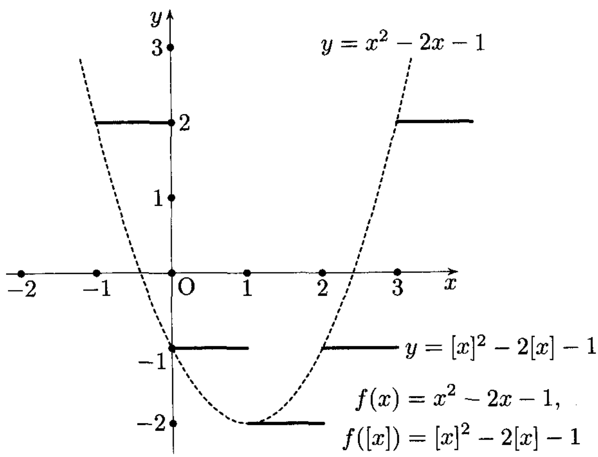
72.


y
3
2
1
−1
$y = 2^x$
$y = 2^{[x]}$
−3
−2
−1
O
1
2
x
$f(x) = 2^x,$
$f([x]) = 2^{[x]}$

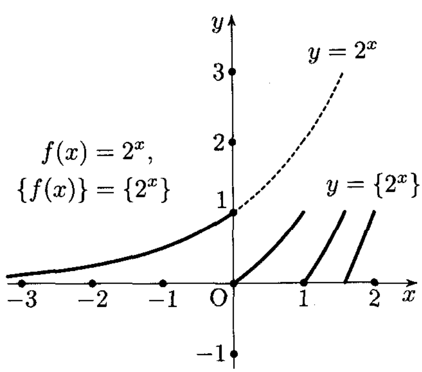
73.


y
3
2
y = arccos[x]
1
y = arccos x
−1
O
1
2
x
f(x) = arccos x,
−1
f([x]) = arccos[x]

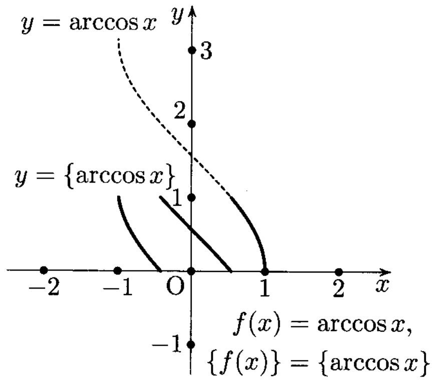
74.


y
3
y = x² − 2x − 1
2
1
−2
−1
O
1
2
3
x
y = [x]² − 2[x] − 1
−1
f(x) = x² − 2x − 1,
−2
f([x]) = [x]² − 2[x] − 1

75.

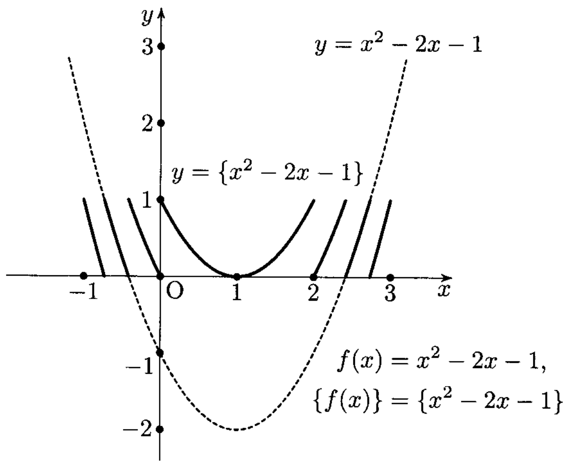

y
y = 2^x
3
2
f(x) = 2^x,
{f(x)} = {2^x}
y = {2^x}
1
−3
−2
−1
O
1
2
x
−1

76.



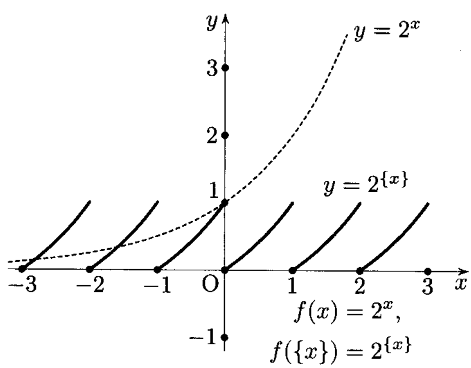
$y = \arccos x$
y
3
2
$y = \{\arccos x\}$
1
-2
-1
O
1
2
x
$f(x) = \arccos x,$
-1
$\{f(x)\} = \{\arccos x\}$

77.



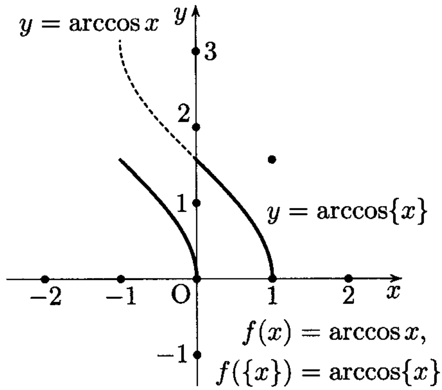
y
3
$y = x^2 - 2x - 1$
2
$y = \{x^2 - 2x - 1\}$
1
-1
O
1
2
3
x
$f(x) = x^2 - 2x - 1,$
-1
$\{f(x)\} = \{x^2 - 2x - 1\}$
-2

78.



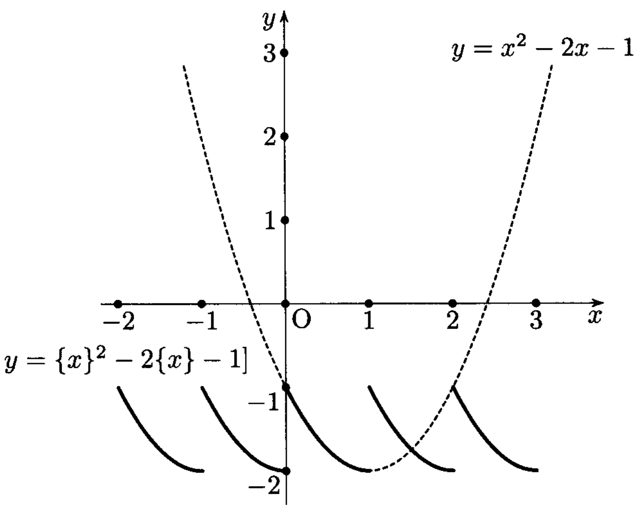
y
$y = 2^x$
3
2
1
$y = 2^{\{x\}}$
-3
-2
-1
O
1
2
3
x
$f(x) = 2^x,$
-1
$f(\{x\}) = 2^{\{x\}}$

79.



$f(x) = \arccos x,$
$f(\{x\}) = \arccos\{x\}$

80.



$f(x) = x^2 - 2x - 1,\ f(\{x\}) = \{x\}^2 - 2\{x\} - 1$

Исаак Яковлевич Танатар

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83

Подписано в печать 07.10.2011 г. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,25. Тираж 1000. Заказ № 3881.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

Книга посвящена некоторым важным приёмам построения графиков функций. Имеется большое количество упражнений, снабженных ответами.

Книга будет полезна школьным учителям математики, руководителям математических кружков и школьникам старших классов.

ISBN 978-5-94057-885-7

9 785940 578857 >

biblio@mccme.ru
www.biblio.mccme.ru